SERIA X
ROZWIĄZANIA

MECHANIKA KWANTOWA '26

Zadanie 1

Treść: Przyjmijmy, że elektron w atomie wodoru w chwili czasu t znajduje się w stanie

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|21-1,+\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}}|100,-\rangle, \tag{1}$$

gdzie $|nlm,\sigma\rangle = |nlm\rangle \otimes |\sigma\rangle$. Jakie są wartości oczekiwane operatorów $\hat{L}^2$, $\hat{H}$, $\hat{L}_y$, $\hat{L}_z$, $\hat{S}^2$, $\hat{S}_x$ i $\hat{S}_z$?

Rozwiązanie: Ponieważ każdy z ketów jest stanem własnym operatora $\hat{L}^2$, więc mamy

$$\langle\hat{L}^2\rangle = \hbar^2[\frac{1}{5}1(1+1)] = \frac{2}{5}\hbar^2. \tag{2}$$

Analogicznie mamy

$$\langle\hat{L}_z\rangle = -\frac{1}{5}\hbar \tag{3}$$

Dla operatora $\hat{H}$ atomy wodoru otrzymujemy

$$\langle\hat{H}\rangle = \frac{1}{5}\epsilon_2 + \frac{4}{5}\epsilon_1, \tag{4}$$

gdzie $\epsilon_n = -\frac{\mathrm{Ry}}{n^2}$. Kolejne wielkości dają

$$\langle\hat{S}^2\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\hbar^2 = \frac{3}{4}\hbar^2, \quad \langle\hat{S}_z\rangle = -\frac{3}{10}\hbar. \tag{5}$$

Dla operatorów $\hat{L}_y$ oraz $\hat{S}_x$, zauważamy, ze dane są one przez kombinacje operatorów podnoszących / opuszczających stosowny rzut (momentu pędu / spinu). Jako że pozostawe liczby kwantowe są różne, wartości średnie tych operatorów wynoszą 0.

Zadanie 2

Treść: Wykaż, że równanie Schrödingera dla cząstki o ładunku q w polu elektromagnetycznym jest niezmienne ze względu na transformację cechowania potencjałów skalarnego i wektorowego pól EM, czyli że zachodzi

$$\psi(\vec{r},t) \;\longrightarrow\; \psi'(\vec{r},t) = \psi(\vec{r},t)e^{iq\Lambda(\vec{r},t)/(\hbar c)}. \tag{6}$$

Rozwiązanie: Zauważmy, że dla pochodna czasowa i operator gradientu działają na funkcję ψ, wyrażoną przez ψ', w sposób następujący

$$i\hbar\partial_t\psi(\vec{r},t) = i\hbar\partial_t\left[e^{-iq\Lambda(\vec{r},t)/(\hbar c)}\psi'(\vec{r},t)\right] = e^{-iq\Lambda(\vec{r},t)/(\hbar c)}\left(i\hbar\partial_t + \frac{q}{c}\partial_t\Lambda(\vec{r},t)\right)\psi'(\vec{r},t), \tag{7a}$$

$$-i\hbar\vec{\nabla}\psi(\vec{r},t) = -i\hbar\vec{\nabla}\left[e^{-iq\Lambda(\vec{r},t)/(\hbar c)}\psi'(\vec{r},t)\right] = e^{-iq\Lambda(\vec{r},t)/(\hbar c)}\left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{\nabla}\Lambda(\vec{r},t)\right)\psi'(\vec{r},t). \tag{7b}$$

Podniesienie do kwadratu tego drugiego operatora, po dodaniu do niego potencjału wektorowego, daje

$$\begin{aligned}
\left[-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{r},t)\right]^2\psi(\vec{r},t) &= \sum_i\left[-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{r},t)\right]_i\left[-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{r},t)\right]_i\psi(\vec{r},t) = \\
&= \sum_i\left[-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{r},t)\right]_i e^{-iq\Lambda(\vec{r},t)/(\hbar c)}\left[-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{r},t) - \frac{q}{c}\vec{\nabla}\Lambda(\vec{r},t)\right]_i\psi'(\vec{r},t) = \\
&= e^{-iq\Lambda(\vec{r},t)/(\hbar c)}\left[-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{r},t) - \frac{q}{c}\vec{\nabla}\Lambda(\vec{r},t)\right]^2\psi'(\vec{r},t) \equiv \\
&\equiv e^{-iq\Lambda(\vec{r},t)/(\hbar c)}\left[-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}'(\vec{r},t)\right]^2\psi'(\vec{r},t),
\end{aligned} \tag{8}$$

gdzie

$$\vec{A}'(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{r},t) \tag{9}$$

jest potencjałem wektorowym po zmianie cechowania. Zatem pełne równanie Schrödingera ma postać

$$e^{-iq\Lambda(\vec{r},t)/(\hbar c)}\left(i\hbar\partial_t + \frac{q}{c}\partial_t\Lambda(\vec{r},t)\right)\psi'(\vec{r},t) = e^{-iq\Lambda(\vec{r},t)/(\hbar c)}\left[\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}'(\vec{r},t)\right)^2 + qU(\vec{r},t)\right]\psi'(\vec{r},t), \tag{10}$$

co po wprowadzeniu potencjału skalarnego w nowym cechowaniu $U' = U - \frac{1}{c}\partial_t\Lambda(\vec{r},t)$ oraz podzieleniu przez wspólny czynnik fazowy daje tożsame równanie Schrödingera w nowym cechowaniu.

Zadanie 3

Treść: Rozważ elektron w ustalonym punkcie $\vec{r}$ w zmiennym polu magnetycznym

$$\vec{B}(t) = B_0\cos\omega t\hat{e}_z. \tag{11}$$

a) W chwili czasu $t = 0$ elektron jest spinowym stanie własnym $+\hbar/2$ operatora $\hat{S}_x$. Znajdź stan spinowy w dalszych chwilach czasu.

b) Wyznacz prawdopodobieństwo otrzymania wyniku $-\hbar/2$ przy pomiarze obserwabli $\hat{S}_x$.

c) Jakie jest najmniejsze B_0, które wystarczy by przerzucić spin do stanu własnego $-\hbar/2$ operatora $\hat{S}_x$?

Rozwiązanie:

Jako że interesują nas tylko spinowe stopnie swobody, zapisujemy tę część Hamiltonianu, która odpowiada za sprzężenie spinu z polem magnetycznym

$$\hat{H} = -\hat{\vec{\mu}}\cdot\vec{B} = g\frac{eB_0}{2mc}\hat{S}_z\cos\omega t. \tag{12}$$

Zależne od czasu równanie Schrödingera ma postać

$$i\begin{pmatrix}\dot{c}_+(t)\\ \dot{c}_-(t)\end{pmatrix} = g\frac{eB_0}{4mc}\begin{pmatrix}c_+(t)\\ -c_-(t)\end{pmatrix}. \tag{13}$$

Stan początkowy jest stanem własnym $\hat{S}_x$ o wartości $+\hbar/2$, zatem w bazie stanów własnych $\hat{S}_z$ ma on postać

$$\begin{pmatrix}c_+(0)\\ c_-(0)\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}. \tag{14}$$

Rozwiązanie tych prostych równań ruchu jest postaci

$$c_\pm(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\mp i\frac{\omega_0}{\omega}\sin\omega t}, \quad \omega_0 = g\frac{eB_0}{4mc}. \tag{15}$$

Poszukujemy teraz prawdopodobieństwa znalezienia stanu $|\psi(t)\rangle$ w stanie własnym operatora $\hat{S}_x$ o wartości $-\hbar/2$, który w bazie z-towej przybiera postać

$$|-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -11\end{pmatrix}. \tag{16}$$

Zrzutowanie stanu zależnego od czasu na ten stan i wzięcie moduł kwadrat daje

$$p_-^{(x)}(t) = \sin^2\left(\frac{\omega_0}{\omega}\sin\omega t\right). \tag{17}$$

Natomiast przerzucenie stanu początkowego do $|-\rangle_x$ wymaga, by to prawdopodobieństwo wynosiło 1. Zatem spełniony musi być warunek

$$\frac{\omega_0}{\omega}\sin\omega t^* = (2\pi+1)n, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{18}$$

Daje to minimalną wartość pola magnetycznego (dla $n=0$) równą

$$B_0 = 2\pi\frac{mc}{ge}\frac{\omega}{\sin\omega t^*}. \tag{19}$$

Zadanie 4

Treść: Hamiltonian cząstki o spinie 1/2 i ładunku $-e$ umieszczonej w polu elektromagnetycznym ma postać

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[\vec{p}+\frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r},t)\right]^2 - e\psi(\vec{r},t) + \frac{e\hbar}{2mc}\hat{\vec{\sigma}}\cdot\vec{B}(\vec{r},t). \tag{20}$$

Korzystając z własności macierzy Pauliego, wykaż, że można go przedstawić w postaci

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[\hat{\vec{\sigma}}\cdot\vec{p}+\frac{e}{c}\hat{\vec{\sigma}}\cdot\vec{A}(\vec{r},t)\right]^2 - e\psi(\vec{r},t). \tag{21}$$

Rozwiązanie: Skorzystajmy ze związku

$$\hat{\vec{\sigma}}\cdot\vec{A}\hat{\vec{\sigma}}\cdot\vec{B} = \vec{A}\cdot\vec{B} + i\hat{\vec{\sigma}}(\vec{A}\times\vec{B}), \tag{22}$$

który wynika bezpośrodnio z własności macierzy Pauliego. Daje to

$$\begin{aligned}\hat{\vec{\sigma}}\cdot\left(\vec{p}+\frac{e}{c}\cdot\vec{A}(\vec{r},t)\right)\hat{\vec{\sigma}}\cdot\left(\vec{p}+\frac{e}{c}\cdot\vec{A}(\vec{r},t)\right) &= \left(\vec{p}+\frac{e}{c}\cdot\vec{A}(\vec{r},t)\right)^2 + \\ + i\hat{\vec{\sigma}}\left[\left(\vec{p}+\frac{e}{c}\cdot\vec{A}(\vec{r},t)\right)\times\left(\vec{p}+\frac{e}{c}\cdot\vec{A}(\vec{r},t)\right)\right]\end{aligned} \tag{23}$$

Rozważmy teraz i-tą składową powyższego iloczynu wektorowego. Mamy

$$\begin{aligned}\left[\left(\vec{p}+\frac{e}{c}\cdot\vec{A}(\vec{r},t)\right)\times\left(\vec{p}+\frac{e}{c}\cdot\vec{A}(\vec{r},t)\right)\right]_i &= \frac{e}{c}\left(\vec{p}\times\vec{A}(\vec{r},t)+\vec{A}(\vec{r},t)\times\vec{p}\right)_i = \\ = -i\hbar\frac{e}{c}\sum_{jk}\epsilon_{ijk}(\partial_j A_k + A_k\partial_j).\end{aligned} \tag{24}$$

Należy pamiętać, że operator różniczkowy w pierwszym członie działa na iloczyn składowej potencjału wektorowego i funkcję falową. Można go zatem zapisać jako

$$\partial_j(A_k\psi) + A_k\partial_j\psi = A_k\partial_j\psi) + A_k\partial_j\psi + (\partial_j A_k). \tag{25}$$

Pierwsze dwa człony nie dadzą wkładu, gdyż są symetryczne ze względu na przestawienie indeksów k i j i po zwężeniu z antysymetrycznym $\hat{\epsilon}$ dadzą zero. Drugi zaś człon daje

$$-i\hbar\frac{e}{c}\sum_{jk}\epsilon_{ijk}(\partial_j A_k) = -i\hbar\frac{e}{c}B_i. \tag{26}$$

Zatem Hamiltonian przepisuje się do postaci

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[\vec{p}+\frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r},t)\right]^2 - e\psi(\vec{r},t) + \frac{e\hbar}{2mc}\hat{\vec{\sigma}}\cdot\vec{B}(\vec{r},t). \tag{27}$$

Zadanie 5

Treść: Rozważmy elektron w jednorodnym polu magnetycznym $\vec{B}$.

a) Wykaż, że biorąc $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{B}$ i $\vec{B}\propto\hat{e}_z$, orbitalna część Hamitlonianu składa się z dwu komutujących ze sobą części $\hat{H}_\perp$ i $\hat{H}_\parallel$, prostopadłej i równoległej do $\vec{B}$.

b) Wykaż, że $\hat{H}_\perp$ można wyrazić w postaci jednowymiarowego oscylatora Harmonicznego

$$\hat{H}_\perp = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{Q}^2, \quad \omega = \frac{eB}{mc}, \tag{28}$$

gdzie $[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar$. Zdiagonalizuj ten Hamilonian wprowadzając stosowne $\hat{a}$ i $\hat{a}^\dagger$.

c) Wykaż, że $[\hat{H}_\perp, \hat{L}_z] = 0$ oraz że $[\hat{L}_z, \hat{a}^{\dagger n}] = n\hbar\hat{a}^{\dagger n}$.

d) Wyznacz wartości własne $\hat{H}_\parallel$ i znajdź wspólne wektory własne operatorów $\hat{H}_\parallel$, $\hat{H}_\perp$ i $\hat{L}_z$.

e) Wykaż, że oddziaływanie spin-pole B można zapisać w postaci

$$\hat{H}_S = \hbar\omega\left(\hat{b}^\dagger\hat{b} - \frac{1}{2}\right), \quad \hat{b} = \frac{1}{\hbar}\left(\hat{S}_x + i\hat{S}_y\right). \tag{29}$$

Wykaż, że te operatory spełniają *fermionową* relację antykomutacyjną $\{\hat{b}, \hat{b}^\dagger\} = 1$ i $\hat{b}^2 = \hat{b}^{\dagger 2} = 0$. Wykaż, że operator liczby wzbudzeń $\hat{N} = \hat{b}^\dagger\hat{b}$ ma wartości własne 0 i 1 i że odpowiadające im wektory własne spełniają $\hat{b}|0\rangle = 0$, $|1\rangle = \hat{b}^\dagger|0\rangle$.

f) Wprowadźmy $\hat{R} = \sqrt{\hbar\omega}\hat{a}\hat{b}^\dagger$. Wykaż, że zachodzi

$$\{\hat{R}, \hat{R}^\dagger\} = \hat{H}_\perp + \hat{H}_S. \tag{30}$$

Rozwiązanie:
a) Dla takiej orientacji pola magnetycznego bierzemy $\vec{a} = (-By/2, Bx/2, 0)$ i otrzymujemy

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2m}\left(p_x - \frac{eB}{2c}y\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(p_x + \frac{eB}{2c}x\right)^2 + \frac{1}{2m}p_z^2. \tag{31}$$

Oznaczając pierwsze dwie częsci przez $\hat{H}_\perp$ i $\hat{H}_\parallel$ od razu widzimy, że $[\hat{H}_\perp, \hat{H}_\parallel] = 0$.

b) Wprowadźmy operatory pomocnicze

$$\hat{v}_i = \frac{1}{m}(\hat{p}_i + \frac{e}{c}A_i), \tag{32}$$

które spełniają regułę komutacyjną

$$[\hat{v}_i, \hat{v}_j] = \frac{e}{m^2c}\left([\hat{p}_i, A_j] + [\hat{p}_j, A_i]\right) = -i\frac{e\hbar}{m^2c}(\partial_i A_j - \partial_j A_i) = -i\frac{e\hbar}{m^2c}\sum_k \epsilon_{ijk}B_k. \tag{33}$$

W przypadku pola B i cechowania potencjału wektorowego $\vec{A}$ jak w zadaniu, mamy

$$[\hat{v}_x, \hat{v}_y] == -i\hbar\frac{\omega}{m}, \quad \omega = \frac{eB}{mc} > 0. \tag{34}$$

W kolejnym kroku wprowadzamy następujące operatory

$$\hat{Q} = \alpha\sqrt{\frac{m}{\omega}}\hat{v}_y, \quad \hat{P} = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{m}{\omega}}\hat{v}_x, \quad \Rightarrow \quad [\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar. \tag{35}$$

Parametr α określimy w kolejnych krokach, tymczasem zauważamy, że zachodzi

$$\hat{H}_\perp = \frac{\omega}{2}\left(\alpha^2\hat{P}^2 + \frac{\hat{Q}^2}{\alpha^2}\right). \tag{36}$$

Dobierając $\alpha^2 = 1/(m\omega)$ dostajemy standardowy Hamiltonian oscylatora harmonicznego

$$\hat{H}_\perp = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{Q}^2. \tag{37}$$

Teraz droga już jest prosta, gdyż wystarczy wprowadzić operatory kreacji i anihilacji

$$\hat{a} = \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{Q}}{a_0} + i\frac{a_0}{\hbar}\hat{P}\right) \tag{38a}$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{Q}}{a_0} - i\frac{a_0}{\hbar}\hat{P}\right), \tag{38b}$$

gdzie oscylatorowa jednostka długości dana jest przez standardowe wyrażenie $a_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$. Hamiltonian propstopadły przyjmuje zatem znaną postać

$$\hat{H}_\perp = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \tag{39}$$

i zachodzą znane związki

$$E_{n_\perp} = \hbar\omega\left(n_\perp + \frac{1}{2}\right), \quad |n_\perp\rangle = \frac{(\hat{a})^{n_\perp}}{\sqrt{n_\perp!}}|0_\perp\rangle, \quad \hat{a}|0_\perp\rangle = 0. \tag{40}$$

c) Po prostych przekształceniach Hamiltonian $\hat{H}_0$ zapisujemy jako

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + \frac{eB}{2mc}\hat{L}_z + \frac{e^2B^2}{8mc^2}(x^2+y^2) \tag{41}$$

i od razu widać, że komutuje on z $\hat{L}_z$. Następnie korzystamy ze związku

$$[\hat{L}_z, \hat{v}_j] = i\hbar\sum_k \epsilon_{ijk}\hat{v}_k, \quad \Rightarrow \quad [\hat{L}_z, \hat{v}_x] = i\hbar\hat{v}_y, \quad [\hat{L}_z, v_y] = -i\hbar\hat{v}_x. \tag{42}$$

Oznacza to, że korzystając z definicji operatora $\hat{a}$ mamy

$$[\hat{L}_z, \hat{a}] = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}[\hat{L}_z, \hat{v}_y + i\hat{v}_x] = -\hbar\hat{a}. \tag{43}$$

Analogicznie otrzymujemy

$$[\hat{L}_z, \hat{a}^\dagger] = \hbar\hat{a}^\dagger. \tag{44}$$

Stąd od razu otrzymujemy

$$[\hat{L}_z, \hat{a}^{\dagger n}] = a^\dagger[\hat{L}_z, \hat{a}^{\dagger(n-1)}] + [\hat{L}_z, \hat{a}^\dagger]\hat{a}^{\dagger(n-1)} = a^\dagger[\hat{L}_z, \hat{a}^{\dagger(n-1)}] + \hbar a^{\dagger n} \tag{45}$$

co przez indukcję daje

$$[\hat{L}_z, \hat{a}^{\dagger n}] = n\hbar a^{\dagger n}. \tag{46}$$

d) Hamiltonian $\hat{H}_\|$ ma postać

$$\hat{H}_\| = \frac{\hat{p}_z^2}{2m}, \tag{47}$$

jest to zatem Hamiltonian cząstki swobodnej, którego stany własne są stanami własnymi operatora pędu $\hat{p}_z|p_z\rangle = p_z|p_z\rangle$ (w reprezentacji położeniowej są to fale płaskie). Ponieważ trzy operatory $\hat{H}_\perp$, $\hat{H}_\|$ i $\hat{L}_z$ komutują, mają wspólną bazę stanów własnych

$$|\psi_{n_\perp,m,p_z}\rangle = |n_\perp, m, p_z\rangle. \tag{48}$$

e) Korzystając z definicji operatora $\hat{b}$ otrzymujemy

$$\hat{b}^\dagger\hat{b} = \frac{1}{\hbar^2}\left(\hat{S}_x - i\hat{S}_y\right)\left(\hat{S}_x + i\hat{S}_y\right) = \frac{1}{\hbar^2}\left(\hat{\vec{S}}^2 - \hat{S}_z + \hbar S_z\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\hbar}\hat{S}_z. \tag{49}$$

A zatem zachodzi

$$\hat{H}_S = \hbar\omega \left(\hat{b}^\dagger \hat{b} - \frac{1}{2}\right) = \omega \hat{S}_z, \tag{50}$$

czyli rzeczywiście jest to Hamiltonian oddziaływania pola $\vec{B}$ skierowanego wzdłuż osi z ze spinem. Możemy analogicznie wykazać, że

$$\hat{b}\hat{b}^\dagger = \frac{1}{\hbar^2}\left(\hat{S}_x + i\hat{S}_y\right)\left(\hat{S}_x - i\hat{S}_y\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\hbar}\hat{S}_z. \tag{51}$$

Stąd zachodzi reguła antykomutacyjna

$$\{\hat{b}, \hat{b}^\dagger\} = 1. \tag{52}$$

Bezpośredni rachunek, odwołujący się do własności macierzy Pauliego daje z kolei

$$\hat{b}^2 = \frac{1}{4}\left(\hat{\sigma}_x + i\hat{\sigma}_y\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\hat{\sigma}_x^2 - \hat{\sigma}_y^2 + i(\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y + \hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x)\right) = 0. \tag{53}$$

Przechodzimy teraz do dyskusji operatora liczby wzbudzeń. Mamy

$$\hat{N}_s^2 \equiv (\hat{b}^\dagger \hat{b})^2 = \hat{b}^{(}1 - \hat{b}^\dagger\hat{b}) \dagger \hat{b} = \hat{b}^\dagger\hat{b} - \hat{b}^2\hat{b}^{\dagger 2} = \hat{N}_s. \tag{54}$$

Zatem operator $\hat{N}_s$ jest operatorem rzutowym, a jego wartości własne to 0 lub 1. Dla stanu własnego $|0\rangle$ o wartości własnej 0 mamy

$$\hat{N}_s|0\rangle = \hat{b}^\dagger\hat{b}|0\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle 0|\hat{b}^\dagger\hat{b}|0\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{b}|0\rangle = 0. \tag{55}$$

Ponadto, jeżeli zdefiniujemy $|1\rangle \equiv \hat{b}^\dagger|0\rangle$, to mamy

$$\hat{N}_s|1\rangle = \hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{b}^\dagger|0\rangle = \hat{b}^\dagger(1 + \hat{b}^\dagger\hat{b})|0\rangle = \hat{b}^\dagger|0\rangle, \tag{56}$$

jest to zatem stan własny operatora liczby wzbudzeń o wartości własnej 1.

f) Definiując $\hat{R} = \sqrt{\hbar\omega}\hat{a}\hat{b}^\dagger$, mamy

$$\begin{aligned}\{\hat{R}, \hat{R}^\dagger\} &= \hbar\omega\left(\hat{a}\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{a}^\dagger + \hat{b}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{b}^\dagger\right) = \hbar\omega\left(\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{b}^\dagger\hat{b} + \hat{a}^\dagger\hat{a}(1 - \hat{b}^\dagger\hat{b})\right) = \hbar\omega\left((\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a})\hat{b}^\dagger\hat{b} + \hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\\ &= \hbar\omega\left(\hat{b}^\dagger\hat{b} + \hat{a}^\dagger\hat{a}\right) = \hat{H}_\perp + \hat{H}_S.\end{aligned} \tag{57}$$