**SERIA 8**
**ROZWIĄZANIA**

MECHANIKA KWANTOWA '26

## Zadanie 1

*Treść*: Dodawanie momentu pędu i współczynnuki Clebscha-Gordana.

*Rozwiązanie*:

• **Procedura** Przez "dodawanie momentu pędu" rozumiemy przejście od bazy stanów własnych operatorów momentu pędu $(\hat{J}_1^2,\ \hat{J}_{1,z})$ i $(\hat{J}_2^2,\ \hat{J}_{2,z})$ do bazy w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, dla której poszukujemy stanów własnych operatorów

$$\hat{J}^2 = (\hat{\vec{J}}_1 + \hat{\vec{J}}_2)^2, \quad \hat{J}_z = \hat{J}_{1,z} + \hat{J}_{2,z}. \tag{1}$$

Istotne dla naszych obliczeń jest zauważenie, że

$$\hat{J}^2 = (\hat{\vec{J}}_1 + \hat{\vec{J}}_2)^2 = \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + 2\hat{J}_{1,z}\hat{J}_{1,z} + 2\hat{J}_{1,x}\hat{J}_{1,x} + 2\hat{J}_{1,y}\hat{J}_{1,y}. \tag{2}$$

Dwa ostatnie człony możemy wyrazić poprzez operatory podnoszące / opuszczające rzut momentu pędu

$$\begin{aligned}\hat{J}_{1,x}\hat{J}_{1,x} + \hat{J}_{1,y}\hat{J}_{1,y} &= \frac{1}{4}\left(\hat{J}_{1,+} + \hat{J}_{1,-}\right)\left(\hat{J}_{2,+} + \hat{J}_{2,-}\right) - \frac{1}{4}\left(\hat{J}_{1,+} - \hat{J}_{1,-}\right)\left(\hat{J}_{2,+} - \hat{J}_{2,-}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\hat{J}_{1,+}\hat{J}_{2,-} + \hat{J}_{1,-}\hat{J}_{2,+}\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Otrzymujemy zatem kwadrat całkowitego momentu pędu wyrażony przez operatory jednociałowe, które wiemy, jak działają na odpowiednie stany własne:

$$\hat{J}^2 = (\hat{\vec{J}}_1 + \hat{\vec{J}}_2)^2 = \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + 2\hat{J}_{1,z}\hat{J}_{1,z} + \left(\hat{J}_{1,+}\hat{J}_{2,-} + \hat{J}_{1,-}\hat{J}_{2,+}\right). \tag{4}$$

Konstrukcję stanów własnych rozpoczynamy od obserwacji, że istnieją dwa wyszczególnione stany, które łatwo skonstruować. Mianowicie

$$|\psi^{j_1,j_2}_{j_1,j_2}\rangle = |j_1, j_1\rangle \otimes |j_2, j_2\rangle, \quad |\psi^{j_1,j_2}_{-j_1,-j_2}\rangle = |j_1, -j_1\rangle \otimes |j_2, -j_2\rangle. \tag{5}$$

Stany te mają następujące własności

$$\hat{J}_z|\psi^{j_1,j_2}_{\pm j_1,\pm j_2}\rangle = \pm\hbar(j_1 + j_2)|\psi^{j_1,j_2}_{\pm j_1,\pm j_2}\rangle \tag{6a}$$

$$\begin{aligned}\hat{J}^2|\psi^{j_1,j_2}_{\pm j_1,\pm j_2}\rangle &= \hbar^2\left(j_1(j_1+1) + j_2(j_2+1) + 2j_1j_2\right)|\psi^{j_1,j_2}_{\pm j_1,\pm j_2}\rangle = \\ &= \hbar^2(j_1+j_2)(j_1+j_2+1)|\psi^{j_1,j_2}_{\pm j_1,\pm j_2}\rangle.\end{aligned} \tag{6b}$$

Zatem są to stany własne operatorów $\hat{J}^2$ i $\hat{J}_z$ o całkowitym momencie pędu równym $\hbar(j_1+j_2) \equiv \hbar j^*$ i o minimalnym / maksymalnym rzucie $\pm\hbar(j_1 + j_2)$. Mając stan o maksymalnym rzucie możemy, tak jak w przypadku zagadnienia jednocząstkowego, skonstruować stany o niższym rzucie. Od tej pory zonaczać będziemy stany dwucząstkowe przez wartość momentu pędu i rzut. Czyli mamy

$$\begin{aligned}|j^*, j^*-1\rangle &= \frac{1}{\hbar\sqrt{j^*(j^*+1) - j^*(j^*-1)}}\hat{J}_-|j^*, j^*\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{2j^*}}\hat{J}_-|j^*, j^*\rangle = \\ &= \frac{1}{\hbar\sqrt{2j^*}}\left(\hat{J}_{1,-} + \hat{J}_{2,-}\right)|j_1, j_1\rangle \otimes |j_2, j_2\rangle = \\ &= \sqrt{\frac{j_1}{j^*}}|j_1, j_1-1\rangle \otimes |j_2, j_2\rangle + \sqrt{\frac{j_2}{j^*}}|j_1, j_1\rangle \otimes |j_2, j_2-1\rangle.\end{aligned} \tag{7}$$

Konstrukcję tę możemy powtarzać aż dojdizemy do stanu $|j^*, -j^*\rangle$. Łącznie w tej podprzestrzeni o ustalonym $j^*$ jest, rzecz jasna $2j^* + 1$ stanów o różnych rzutach.

Stajemy teraz przez zadaniem skonstruowania stanów o mniejszym całkowitym momencie pędu. Tu jednak z pomocą przychodzi nam obserwacja, że stan ortogonalny do powyższego, postaci

$$|\psi\rangle = -\sqrt{\frac{j_2}{j^*}}|j_1, j_1-1\rangle \otimes |j_2, j_2\rangle + \sqrt{\frac{j_1}{j^*}}|j_1, j_1\rangle \otimes |j_2, j_2-1\rangle \tag{8}$$

jest również stanem własnym $\hat{J}_z$ o wartości własnej $\hbar(j^*-1)$. Niemniej całkowity moment pędu jest w tym przypadku równy $\hbar(j^*-1)$, co łatwo zweryfikować używając wyrażenia (4). Stany o niższym rzucie w tej podprzestrzeni konstuujemy analogicznie, działając operatorem obniżającym.

Kolejne pytanie dotyczy tego, jak skonstruować stan o wartości momentu pędu $\hbar(j^*-2)$. Widać, że stany o wartości $\hbar(j^*-1)$ i $\hbar j^*$ ale o rzucie $\hbar(j^*-2)$ są kombinacją iloczynu trzech stanów: $|j_1, j_1-2\rangle \otimes |j_2, j_2\rangle$, $|j_1, j_1-1\rangle \otimes |j_2, j_2-1\rangle$ oraz $|j_1, j_1\rangle \otimes |j_2, j_2-2\rangle$. Te stany rozpinają trójwymiarową podprzestrzeń, zatem stan o całkowitym momencie pędu $\hbar(j^*-2)$ należy skonstruować jako prostopadły do tych dwu.

Tę skomplikowaną procedurę kontunuujemy, lecz musi się ona urwać, gdyż wymiar przestrzeni dwuciałowej jest skończony i wynosi $(2j_1+1)(2j_2+2)$. W następnym zadaniu wykażemy, że minimalna wartośc, na której ta procedura się kończy, to $|j_1-j_2|$.

• **Współczynniki C-G**

Jak wynika z rozważań z poprzedniej części, dodawanie momentu pędu prowadzi do powstania

$$|j,m\rangle = \sum_{m_1,m_2} C_{j_1,j_2}(m_1m_2;jm)|j_1,m_1;j_2,m_2\rangle, \quad C_{j_1,j_2}(m_1m_2;jm) = \langle j,m|j_1,m_1;j_2,m_2\rangle. \tag{9}$$

Wielkości te nazywamy współczynnikami Clebscha-Gordana i powyższe obliczenia pokazują, że można je dobrać tak, by były rzeczywiste. Ponadto warto zauważyć, że suma po $m_1$ i $m_2$ nie jest po całym zakresie zmienności tych wielkości, lecz narzuconu jest wiąz wynikający z tego, że

$$\hat{J}_z|j,m\rangle = \hbar m|j,m\rangle = \hbar \sum_{m_1,m_2} C_{j_1,j_2}(m_1m_2;jm)(m_1+m_2)|j_1,m_1;j_2,m_2\rangle. \tag{10}$$

Zatem musi zachodzić, po przeniesieniu na jedną stronę

$$\hbar \sum_{m_1,m_2} C_{j_1,j_2}(m_1m_2;jm)(m_1+m_2-m)|j_1,m_1;j_2,m_2\rangle = 0. \tag{11}$$

Zatem niezerowe współczynniki są tylko, gdy $m_1+m_2-m$. Ponadto możemy wyliczyć parę własności C-G:

1) Jako że $\langle j,m|j',m'\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'}$, zatem

$$\begin{aligned}\delta_{j'j}\delta_{mm'} &= \sum_{m_1,m_2}\sum_{m_1',m_2'} C_{j_1,j_2}(m_1m_2;jm)C_{j_1,j_2}(m_1'm_2';j'm')\langle j_1,m_1;j_2,m_2|j_1,m_1';j_2,m_2'\rangle \\ &= \sum_{m_1,m_2} C_{j_1,j_2}(m_1m_2;jm)C_{j_1,j_2}(m_1m_2;j'm'). \end{aligned}\tag{12}$$

2) Ponadto korzystając z rozkładu jedynki w pełnej przestrzeni iloczynowej

$$\hat{\mathbb{1}} = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2}\sum_{m=-j}^{j}|j,m\rangle\langle j,m| = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{j_2}|j_1,m_1;j_2,m_2\rangle\langle j_1,m_1;j_2,m_2|. \tag{13}$$

Zatem zachodzi

$$\delta_{m_1m_1'}\delta_{m_2m_2'} = \langle j_1,m_1;j_2,m_2|j_1,m_1';j_2,m_2'\rangle = \tag{14}$$

$$= \langle j_1,m_1;j_2,m_2|\sum_{j,m}|j,m\rangle\langle j,m||j_1,m_1';j_2,m_2'\rangle = \sum_{j,m} C_{j_1,j_2}(m_1m_2;jm)C_{j_1,j_2}(m_1'm_2';jm) \tag{15}$$

3) Współczynniki C-G mają wiele symetrii, np.

$$C_{j_1,j_2}(m_1m_2;jm) = (-1)^{j_1+j_2-j}C_{j_1,j_2}(m_2m_1;jm), \tag{16}$$

ale tego już nie będziemy dowodzić.

## Zadanie 2

*Treść*: Wykaż, że procedura dodawania momentu pędu $j_1$ i $j_2$ daje minimalną wartość całkowitego momentu pędu wynoszącą $|j_1 - j_2|$.

*Rozwiązanie*:

Zauważmy, że jeżeli oznaczymy przez $j'$ najmniejszą możliwą wartość momentu pędu, to musi być zachowany wymiar przestrzeni, to znaczy

$$\sum_{j=j'}^{j_1+j_2}(2j+1) = (2j_1+1)(2j_2+1). \tag{17}$$

Najpierw rozważmy przypadek, gdy $j_1$ i $j_2$ są liczbami naturalnymi. Wtedy, wprowadzając $j^* = j_1 + j_2$, mamy

$$\sum_{j=0}^{j^*}(2j+1) - \sum_{j=0}^{j'-1}(2j+1) = (j^*+1)^2 - (j')^2 = (2j_1+1)(2j_2+1). \tag{18}$$

Stąd otrzymujemy

$$(j')^2 = (j_1 - j_2)^2 \quad \Rightarrow j' = |j_i - j_2|. \tag{19}$$

Gdy jedna z tych liczb jest połówkowa a druga naturalna. Wtedy zarówno $j^*$ jak i $j'$ są połówkowe, zaś $2j^*$ i $2j'$ są nieparzyste. Wtedy możemy napisać

$$\sum_{k=2j'}^{2j^*}(k+1) = (2j_1+1)(2j_2+1), \tag{20}$$

gdzie $k$ przyjmuje tylko wartości nieparzyste. Wtedy korzystając z tego, że sumowanie po nieparzystym $k$ do nieparzystego $n$ daje

$$\sum_{k=1}^{n} k = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2, \quad \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{n+1}{2}. \tag{21}$$

znów zapisujemy, jak poprzednio

$$\begin{aligned}\sum_{k=2j'}^{2j^*}(k+1) &= \sum_{k=1}^{2j^*}(k+1) - \sum_{k=1}^{2j'-2}(k+1) = \frac{2j^*+1}{2}\left(\frac{2j^*+1}{2}+1\right) - \frac{2j'-1}{2}\left(\frac{2j'-1}{2}+1\right) \\ &= (j^*+1)^2 - (j')^2 = (2j_1+1)(2j_2+1), \end{aligned} \tag{22}$$

co prowadzi do tego samego wyniku co poprzednio.

## Zadanie 3

*Treść*: Wyznacz stany całkowitego momenentu pędu dwu cząstek: jednej o $j_1 = 1$, drugiej o $j_2 = 1/2$.

*Rozwiązanie*:

Korzystamy z ogólnego wyrażenia na rozkład stanu z przestrzeni $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ na stany iloczynowe, czyli

$$|j, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} C_{1,1/2}(m_1 m_2; jm)|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle. \tag{23}$$

Oczywiście mamy dostępne możliwości: $j = 3/2$ i $j = 1/2$ o dpowiednio rzuty $-3/2 \ldots 3/2$ oraz $-1/2 \ldots 1/2$. Stan o maksymalnym momencie pędu oraz maksymalnym / minimalnym rzucie otrzymujemy poprzez iloczyn stanów jednocząstkowych o maksymalnym / minimalnym rzucie

$$|3/2, \pm 3/2\rangle = |1, \pm 1\rangle \otimes |1/2, \pm 1/2\rangle \tag{24}$$

Teraz korzystamy z wyniku (7) z Zadania 1, czyli

$$|3/2,1/2\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|1,1\rangle \otimes |1/2,-1/2\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1,0\rangle \otimes |1/2,1/2\rangle \tag{25}$$

Zadziałanie na ten stan sumą jednocząstkowych operaotrów obniżających daje

$$|3/2,-1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|1,0\rangle \otimes |1/2,-1/2\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|1,-1\rangle \otimes |1/2,1/2\rangle \tag{26}$$

Pozostają nam stany o $j = 1/2$. Na mocy konstrukcji (8) mamy

$$|1/2,1/2\rangle = -\sqrt{\frac{2}{3}}|1,1\rangle \otimes |1/2,-1/2\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|1,0\rangle \otimes |1/2,1/2\rangle \tag{27}$$

zaś obniżenie tu rzutu daje

$$|1/2,-1/2\rangle = -\sqrt{\frac{1}{3}}|1,0\rangle \otimes |1/2,-1/2\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1,-\rangle \otimes |1/2,1/2\rangle. \tag{28}$$

**Zadanie 4**

*Treść*: Stan nazywamy niezmiennyczym ze względu na obrót, jeżeli zachodzi $\hat{\vec{J}}^2|\psi\rangle = 0$. Rozważmy dwie cząstki o momencie pędu $j_1$ i $j_2$.

a) Jaki musi być związek między $j_1$ i $j_2$, by można było otrzymać stan dwucząstkowy niezmienniczy ze względu na obrót?

b) Znajdź związek między współczynnikami CG wynikający z faktu, że dla tego stanu zachodzi $\hat{J}_+|\psi\rangle = 0$.

c) Na tej podstawie, wykaż, że współczynniki CG dane są wyrażeniem

$$C_{jj}(m;-m;00) = \frac{(-1)^{j-m}}{\sqrt{2j+1}} \tag{29}$$

d) Z kolei na podstawie tego wyniku by znaleźć wyrażenie na dodawanie harmonik sferycznych

$$P_l(\hat{a}\cdot\hat{b}) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}(-1)^m Y_{l,m}(\hat{a})Y_{l,-m}(\hat{b}), \tag{30}$$

gdzie $\hat{a}$ i $\hat{b}$ to wersory. W tym celu wykaż, że funkcja

$$F_l(\hat{a},\hat{b}) = \sum_{m=-l}^{l}\frac{(-1)^m}{\sqrt{2l+1}}Y_{l,m}(\hat{a})Y_{l,-m}(\hat{b}), \tag{31}$$

zależy tylko od iloczyny skalarnego $\hat{a}\cdot\hat{b}$, jest zatem niezmiennicza ze względu na obroty. Biorąc $\hat{\vec{a}} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$, $\hat{b} = (0,0,1)$ wyprowadź wyrażenie na dodawanie harmonik sferycznych.

*Rozwiązanie*:

a) Stan niezmienniczy ze względu na obrót to taki, który ma zerowy moment pędu, oznaczymy go zatem jako $|0,0\rangle$. Zatem musi zachodzić $j_1 = j_2$. Tylko wtedy stan o minimalnym całkowitym momencie pędu będzie miał $j = |j_1 - j_2| = 0$.

b) W szczególności, dla tego stanu zachodzi

$$\hat{J}_+|0,0\rangle = 0. \tag{32}$$

Zauważmy, że stan ten można wyrazić przez C-G jako

$$|0,0\rangle = \sum_m C_{j,j}(m,-m;0,0)|j,m;j,-m\rangle. \tag{33}$$

Działając na ten stan operatorem podnoszącym, otrzymujemy

$$\hat{J}_+|0,0\rangle = \hbar \sum_m C_{j,j}(m,-m;0,0)\Big(\sqrt{j(j+1)-m(m+1)}|j,m+1;j,-m\rangle$$
$$+ \sqrt{j(j+1)+m(-m+1)}|j,m;j,-m+1\rangle\Big) = 0. \tag{34}$$

Zmieniamy indeks sumowania na przykład w drugiej parze stanów i otrzymujemy

$$0 = \sum_m [C_{j,j}(m,-m;0,0) + C_{j,j}(m+1,-m-1;0,0)]\sqrt{j(j+1)-m(m+1)}|j,m+1;j,-m\rangle \tag{35}$$

a zatem musi zachodzić

$$C_{j,j}(m,-m;0,0) + C_{j,j}(m+1,-m-1;0,0) = 0. \tag{36}$$

c) Powyższy związek rekurencyjny można uzyskać na przykład przyjmując

$$C_{j,j}(m,-m;0,0) = N_j(-1)^{j-m}, \tag{37}$$

gdzie fazę dobraliśmy tak, żeby $C_{j,j}(j,-j;0,0) > 0$, a zatem stała normująca musi spełniać $N_j > 0$. Stałą normalizującą wyznaczamy ze związku (12), czyli

$$\delta_{j'j}\delta_{mm'} = \sum_{m_1,m_2} C_{j_1,j_2}(m_1m_2;jm)C_{j_1,j_2}(m_1m_2;j'm'). \tag{38}$$

Dostosowujemy ten wzór do naszego przypadku, czyli otrzymujemy warunek

$$\sum_m C^2_{j,j}(m,-m;0,0) = 1. \tag{39}$$

Podstawiamy pod sumę wyrażenie (37) i otrzymujemy $N_j = 1/\sqrt{2j+1}$, czyli

$$C_{j,j}(m,-m;0,0) = \frac{(-1)^{j-m}}{\sqrt{2j+1}}. \tag{40}$$

d) Następująca kombinacja

$$\sum_{m=-l}^{l} \frac{(-1)^{l-m}}{\sqrt{2l+1}} Y_{l,m}(\hat{a})Y_{l,-m}(\hat{b}) \tag{41}$$

jest niczym innym, jak reprezentacją położeniową wyrażenia (33) po uwzględnieniu wyniku (40). Wyrażenie powyższe musi zatem zależeć tylko od skalara $\hat{a}\cdot\hat{b}$. Rozważmy przypadek szczególny $\hat{a} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$, $\hat{b} = (0,0,1)$, który daje

$$Y_{l,m}(\hat{b}) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\delta_{m,0} \tag{42}$$

oraz

$$\frac{(-1)^l}{\sqrt{4\pi}} Y_{l,0}(\hat{a}) = \frac{(-1)^l}{4\pi}\sqrt{2l+1}P_l(\cos\theta). \tag{43}$$

Używając $\hat{a}\cdot\hat{b} = \cos\theta$ otrzymujemy, że ogólne wyrażenie ma postać

$$\sum_{m=-l}^{l} \frac{(-1)^{l-m}}{\sqrt{2l+1}} Y_{l,m}(\hat{a})Y_{l,-m}(\hat{b}) = (-1)^l \frac{\sqrt{2l+1}}{4\pi} P_l(\vec{a}\cdot\vec{b}) \tag{44}$$

lub, korzystając z $(-1)^{-m} = (-1)^m$, otrzymujemy

$$P_l(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}(-1)^m Y_{l,m}(\hat{a})Y_{l,-m}(\hat{b}). \tag{45}$$