SERIA 2

MECHANIKA KWANTOWA '26

Niech zbiór $\{|\psi_i\rangle\}$, gdzie $i \in \{1 \dots n\}$, stanowni bazę ortonormalną pewnej n-wymiarowej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_n$.

Zadanie 1

Korzystając z notacji Diraca, zapisz warunek, że rzeczywiście spełniony jest ten warunek (tworzenia bazy ortonormalnej) Następnie, w tej bazie:

a) zapisz dowolny stan $|\phi\rangle$ jako superpozycję ze współczynnikami c_i;

b) wyznacz jego normę i podaj postać stanu po unormowaniu;

c) mając dwa stany $|\phi_1\rangle$ oraz $|\phi_2\rangle$, wyznacz ich iloczyn skalarny;

d) znajdź iloczyn skalarny wektorów

$$|\phi_1\rangle = \sqrt{2}|\psi_1\rangle + i|\psi_2\rangle \ , \quad |\phi_2\rangle = 3i|\psi_1\rangle + (2+i)|\psi_2\rangle \ ;$$

e) unormuj każdy z tych wektorów.

Zadanie 2

Rozważ zbiór n operatorów postaci $\hat{\Pi}_i = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$. Wyznacz $\hat{\Pi}_i^2$, $\hat{\Pi}_i^k$ $(k \in \mathbb{N})$, $\hat{\Pi}_i\hat{\Pi}_j$. Czym jest operator

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^{n} \hat{\Pi}_i \quad ?$$

Czy operator $\hat{\Pi}_\phi = |\phi\rangle\langle\phi|$, gdzie

$$|\phi\rangle = |\psi_1\rangle + i|\psi_2\rangle$$

jest operatorem rzutowym na stan $|\phi\rangle$? Jeżeli nie, zmodyfikuj $|\phi\rangle$ do $|\tilde{\phi}\rangle$, tak by operator $\hat{\Pi}_{\tilde{\phi}}$ był operatorem rzutowym.

Zadanie 3

W tym zadaniu rozważamy $\mathcal{H}_n$ z poprzedniego zadania z $n = 2$. Korzystając z utorzsamienia

$$|\psi_1\rangle \ \leftrightarrow \ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\psi_2\rangle \ \leftrightarrow \ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

oraz z wyrażenia na wektory

$$|\phi_1\rangle = |\psi_1\rangle + 2i|\psi_2\rangle, \quad |\phi_2\rangle = -|\psi_1\rangle + (1+i)|\psi_2\rangle.$$

wyznacz w postaci macierzowej wielkości

$$\hat{A}_{ij} = |\phi_i\rangle\langle\phi_j|, \ \hat{B}_+ = \hat{A}_{12} + \hat{A}_{21}, \ \hat{B}_- = \hat{A}_{12} - \hat{A}_{21}, \ \hat{\tilde{B}}_- = \hat{A}_{12} - i\hat{A}_{21} \qquad (i,j = 1,2).$$

Które spośród tych operatorów są hermitowskie?

Zadanie 4

Pozostajemy w $\mathcal{H}_2$. Przedstaw w postaci macierzowej następujące operaotry

$$\hat{\sigma}_1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_2| + |\psi_2\rangle\langle\psi_1|, \quad \hat{\sigma}_2 = i(-|\psi_1\rangle\langle\psi_2| + |\psi_2\rangle\langle\psi_1|), \quad \hat{\sigma}_3 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1| - |\psi_2\rangle\langle\psi_2|.$$

Które z nich są hermitowskie? Korzystając z notacji Diraca (i ewentualnie macierzowej), wyznacz komutatory

$$\hat{C}_{ij} = [\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j], \quad (i, j = 1, 2).$$

O jaki operator należy uzupełnić powyższy zbiór, by móc za jego pomocą przedstawić dowolną hermitowską macierz odwzorowania liniowego $\mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$?

Zadanie 5

Niech, w wyjściowej przestrzeni $\mathcal{H}_n$, wielkość $\hat{A}$ będzie obserwablą, której pomiar daje n wyników $a_i \in \mathbb{R}$ i odpowiadających im stanów $|\phi_i\rangle$. Przy pomocy tych wielkości, zapisz jaką postać ma $\hat{A}$. Niech stan układu przed pomiarem ma postać

$$|\psi\rangle = c_1|\phi_1\rangle + c_2|\phi_2\rangle.$$

Unormuj ten stan, podaj jakie są możliwe wyniki pomiarów i jakie są ich prawdpodobieństwa. Jak wygląda stan, gdy po pomiarze $\hat{A}$ dostajemy wynik a_2? W następstwie tego pomiaru, jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania wyniku a_1?

Zadanie 6

Niech w $\hat{H}_n$ dany będzie operator

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|,$$

gdzie $|\phi_i\rangle$ tworzą jakąś bazę ortonormalną. Jaki warunek muszą spełniać x_i, by $\hat{x}$ był obserwablą? Wyznacz następujące wielkości

$$\langle\hat{x}\rangle\,,\ \left\langle\hat{x}^2\right\rangle,\ \left\langle\hat{x}^2\right\rangle - \langle\hat{x}\rangle^2$$

na jakimś stanie

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i |\phi_i\rangle.$$

Podaj przykład c_i takich, by $\langle\hat{x}\rangle^2 = \left\langle\hat{x}^2\right\rangle$.