SERIA 3

MECHANIKA KWANTOWA '26

Zadanie 1

Najprostszym układem kwantowym jest taki, który składa się tylko z dwu poziomów energetycznych. Zaproponuj ogólną postać Hamiltonianu dla takiego układu, znajdź energie i stany własne. Jak ewoluuje w czasie każdy ze stanów? Jak ewoluuje ogólna superpozycja?

Zadanie 2

Nieco bardziej złożony jest układ który ma dwa stopnie swobody i na każdy z nich przypadają dwie możliwe wartości. Przykładem takiego układu jest pojedynczy foton, który może być emitowany w lewo lub prawo (wektor falowy $\pm k$) i w stanie o polaryzacji pionowej lub poziomej (oznaczanej przez V i H). Zaproponuj bazę opisującą taki układ. Zakładając, że dynamika fotonu dopuszcza zmianę polaryzacji, ale nie wektora falowego, jaką postać będzie miał ogólny Hamiltonian w takim przypadku?

Zadanie 3

Rozwiąż stacjonarne równanie Schrödingera dla cząstki o masie m znajdującej się w jednowymiarowej nieskończonej studni potencjału o szerokości $2a$. W stanie podstawowym i pierwszym wzbudzonym znajdź $\langle\hat{x}\rangle$ i $\langle\hat{x}^2\rangle$ oraz $\langle\hat{p}\rangle$ i $\langle\hat{p}^2\rangle$ i wyznacz $\Delta\hat{x}\Delta\hat{p}$. Znajdź dynamikę dowolnego stanu w tym układzie.

Zadanie 4

Znajdź rozwiązanie stacjonarnego równania Schrödingera dla cząstki o masie m poruszającej się w potencjale

$$V(x) = -v_0\delta(x), \quad v_o > 0.$$

Zadanie 5

Powtórz całe rozwiązanie zagadnienia jednowymiarowego oscylatora hamrmonicznego o częstości ω dla cząstki o masie m metodą algebraiczną (było/będzie na wykładzie). Wyznacz $\Delta\hat{x}\Delta\hat{p}$.

Zadanie 6

Przyjmijmy, że maszyna dokonuje pomiaru obserwabli

$$\hat{\mathcal{A}} = a_1\hat{\Pi}_1 + a_2\hat{\Pi}_2, \quad \hat{\Pi}_i = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad |\psi_{1/2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$$

w układzie z poprzedniego zadania. Zakładając, że stan początkowy jest dowolną superpozycją stanów własnych, znajdź prawdopodobieństwo otrzymania wyników a_1 i a_2 w chwili czasu t.

Zadanie 7

Znajdź wszystkie stany własne operatora anihilacji. Wyznacz normalizację, znajdź iloczyn skalarny między nimi. Wykaż, że operatory te tworzą bazę nadzupełną.