SERIA 5

MECHANIKA KWANTOWA ‘26

Zadanie 1

Wykaż, że zachodzi związek

$$\left[\vec{n}\cdot\hat{\vec{L}}, \hat{\vec{V}}\right] = i\hbar\hat{\vec{V}}\times\vec{n}, \tag{1}$$

gdzie $\hat{\vec{V}}$ jest wektorem trzech operatorów działających w tej samej przestrzeni, co $\hat{\vec{L}}$.

Zadanie 2

Stan pewnej cząstki opisywany jest funkcją falową

$$\psi(\vec{r}) = \mathcal{N}(x+y+z)e^{-\frac{r^2}{\alpha^2}}, \quad \alpha\in\mathbb{R}, \tag{2}$$

gdzie $\mathcal{N}$ jest stałą normalizacyjną. Jakie jest prawdopowobieństwo wyników $2\hbar^2$ i 0 przy pomiarze odpowiednio $\hat{L}^2$ oraz $\hat{L}_z$?

Zadanie 3

Cząstka o masie μ bytująca w potencjale $V(r)$ opisywana jest funkcją falową

$$\psi(\vec{r}) = (x+y+3z)f(r). \tag{3}$$

Odpowiedz na następujące pytania:

a) Czy $\psi(\vec{r})$ jest stanem własnym $\hat{L}^2$? Jeżeli tak, to jaka jest wartość l? Jeżeli nie, jakie są możliwe wyniki pomiaru obserwabli $\hat{L}^2$?

b) Jakie są prwadopodobieństwa pomiarów różnych warości m?

c) Załóżmy, że $\psi(\vec{r})$ jest stanem własnym Hamiltonianu. W jaki sposób można wyznaczyć potencjał $V(r)$?

Zadanie 4

Wykaż że dla operatora momentu pędu zachodzą następujące związki

a) $\vec{r}\hat{\vec{L}}$ i $\hat{\vec{L}}\vec{r}$ oraz analogicznie $\vec{p}\hat{\vec{L}}$ i $\hat{\vec{L}}\vec{p}$ są operatorami zerowymi.

b) $\hat{L}^2 = -\vec{r}\left[\vec{p}(\vec{p}\cdot\vec{r}) - \vec{p}^2\vec{r}\right]$

c) $\left[\vec{r}\vec{p}^2\right] = 2i\hbar\vec{p}$, ewentualnie $[\vec{r},\vec{p}] = 3i\hbar$

d) Bezpośrednim rachunkiem w zmiennych sferycznych wykaż $\vec{r}\vec{p} = -i\hbar r\partial_r$.

e) Korzysatając z wyniku b) wykaż $\hat{L}^2 = r^2\vec{p}^2 + \hbar^2\partial_r(r^2\partial r)$.

Zadanie 5

Przyjmijmy, że cząstka jest w stanie własnym operatorów $\hat{L}^2$ oraz $\hat{L}_z$ (wartości własne odpowiednio $\hbar^2 l(l+1)$ oraz $\hbar m$. Wykaż, że w tym stanie $\langle\hat{L}_x\rangle = \langle\hat{L}_y\rangle = 0$ oraz że $\langle\hat{L}_x^2\rangle = \langle\hat{L}_y^2\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\left[l(l+1) - m^2\right]$.