SERIA 7

MECHANIKA KWANTOWA '26

Zadanie 1

Przyjmijmy, że elektron w atomie wodoru w chwili czasu t znajduje się w stanie

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|21-1,+\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}}|100,-\rangle, \tag{1}$$

gdzie $|nlm,\sigma\rangle = |nlm\rangle \otimes |\sigma\rangle$. Jakie są wartości oczekiwane operatorów $\hat{L}^2$, $\hat{H}$, $\hat{L}_y$, $\hat{L}_z$, $\hat{S}^2$, $\hat{S}_x$ i $\hat{S}_z$?

Zadanie 2

Wykaż, że równanie Schrödingera dla cząstki o ładunku q w polu elektromagnetycznym jest niezmienne ze względu na transformację cechowania potencjałów skalarnego i wektorowego pól EM, czyli że zachodzi

$$\psi(\vec{r},t) \;\longrightarrow\; \psi'(\vec{r},t) = \psi(\vec{r},t)e^{iq\Lambda(\vec{r},t)/(\hbar c)}. \tag{2}$$

Zadanie 3

Rozważ elektron w ustalonym punkcie $\vec{r}$ w zmiennym polu magnetycznym

$$\vec{B}(t) = B_0 \cos\omega t \hat{e}_z. \tag{3}$$

a) W chwili czasu $t=0$ elektron jest spinowym stanie własnym $+\hbar/2$ operatora $\hat{S}_x$. Znajdź stan spinowy w dalszych chwilach czasu.

b) Wyznacz prawdopodobieństwo otrzymania wyniku $-\hbar/2$ przy pomiarze obserwabli $\hat{S}_x$.

c) Jakie jest najmniejsze B_0, które wystarczy by przerzucić spin do stanu własnego $-\hbar/2$ operatora $\hat{S}_x$?

Zadanie 4

Hamiltonian cząstki o spinie 1/2 i ładunku $-e$ umieszczonej w polu elektromagnetycznym ma postać

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r},t)\right]^2 - e\psi(\vec{r},t) + \frac{e\hbar}{2mc}\hat{\vec{\sigma}}\cdot\vec{B}(\vec{r},t). \tag{4}$$

Korzystając z własności macierzy Pauliego, wykaż, że można go przedstawić w postaci

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[\hat{\vec{\sigma}}\cdot\vec{p} + \frac{e}{c}\hat{\vec{\sigma}}\cdot\vec{A}(\vec{r},t)\right]^2 - e\psi(\vec{r},t). \tag{5}$$

Zadanie 5

Rozważmy elektron w jednorodnym polu magnetycznym $\vec{B}$.

a) Wykaż, że biorąc $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{B}$ i $\vec{B} \propto \hat{e}_z$, orbitalna część Hamitlonianu składa się z dwu komutujących ze sobą części $\hat{H}_\perp$ i $\hat{H}_\parallel$, prostopadłej i równoległej do $\vec{B}$.

b) Wykaż, że $\hat{H}_\perp$ można wyrazić w postaci jednowymiarowego oscylatora Harmonicznego

$$\hat{H}_\perp = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{Q}^2, \quad \omega = \frac{eB}{mc}, \tag{6}$$

gdzie $[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar$. Zdiagonalizuj ten Hamilonian wprowadzając stosowne $\hat{a}$ i $\hat{a}^\dagger$.

c) Wykaż, że $[\hat{H}_\perp, \hat{L}_z] = 0$ oraz że $[\hat{L}_z, \hat{a}^{\dagger n}] = n\hbar\hat{a}^{\dagger n}$.

d) Wyznacz wartości własne $\hat{H}_\parallel$ i znajdź wspólne wektory własne operatorów $\hat{H}_\parallel$, $\hat{H}_\perp$ i $\hat{L}_z$.

e) Wykaż, że oddziaływanie spin-pole B można zapisać w postaci

$$\hat{H}_S = \hbar\omega\left(\hat{b}^\dagger\hat{b} - \frac{1}{2}\right), \quad \hat{b} = \frac{1}{\hbar}\left(\hat{S}_x + i\hat{S}_y\right). \tag{7}$$

Wykaż, że te operatory spełniają *fermionową* relację antykomutacyjną $\{\hat{b}, \hat{b}^\dagger\} = 1$ i $\hat{b}^2 = \hat{b}^{\dagger 2} = 0$. Wykaż, że operator liczby wzbudzeń $\hat{N} = \hat{b}^\dagger\hat{b}$ ma wartości własne 0 i 1 i że odpowiadające im wektory własne spełniają $\hat{b}|0\rangle = 0$, $|1\rangle = \hat{b}^\dagger|0\rangle$.

f) Wprowadźmy $\hat{R} = \sqrt{\hbar\omega}\hat{a}\hat{b}^\dagger$. Wykaż, że zachodzi

$$\{\hat{R}, \hat{R}^\dagger\} = \hat{H}_\perp + \hat{H}_\parallel. \tag{8}$$