SERIA 8

MECHANIKA KWANTOWA '26

Zadanie 1

Dodawanie momentu pędu i współczynnuki Clebscha-Gordana.

Zadanie 2

Wykaż, że procedura dodawania momentu pędu j_1 i j_2 daje minimalną wartość całkowitego momentu pędu wynoszącą $|j_1 - j_2|$.

Zadanie 3

Wyznacz stany całkowitego momenentu pędu dwu cząstek: jednej o $j_1 = 1$, drugiej o $j_2 = 1/2$.

Zadanie 4

Stan nazywamy niezmiennyczym ze względu na obrót, jeżeli zachodzi $\hat{\vec{J}}^2|\psi\rangle = 0$. Rozważmy dwie cząstki o momencie pędu j_1 i j_2.

a) Jaki musi być związek między j_1 i j_2, by można było otrzymać stan dwucząstkowy niezmienniczy ze względu na obrót?

b) Znajdź związek między współczynnikami CG wynikający z faktu, że dla tego stanu zachodzi $\hat{J}_+|\psi\rangle = 0$.

c) Na tej podstawie, wykaż, że współczynniki CG dane są wyrażeniem

$$C_{jj}(m; -m; 00) = \frac{(-1)^{j-m}}{\sqrt{2j+1}} \tag{1}$$

d) Z kolei na podstawie tego wyniku by znaleźć wyrażenie na dodawanie harmonik sferycznych

$$P_l(\hat{a} \cdot \hat{b}) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} (-1)^m Y_{l,m}(\hat{a}) Y_{l,-m}(\hat{b}), \tag{2}$$

gdzie $\hat{a}$ i $\hat{b}$ to wersory. W tym celu wykaż, że funkcja

$$F_l(\hat{a}, \hat{b}) = \sum_{m=-l}^{l} \frac{(-1)^m}{\sqrt{2l+1}} Y_{l,m}(\hat{a}) Y_{l,-m}(\hat{b}), \tag{3}$$

zależy tylko od iloczyny skalarnego $\hat{a} \cdot \hat{b}$, jest zatem niezmiennicza ze względu na obroty. Biorąc $\hat{a} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$, $\hat{b} = (0, 0, 1)$ wyprowadź wyrażenie na dodawanie harmonik sferycznych.