

Plan

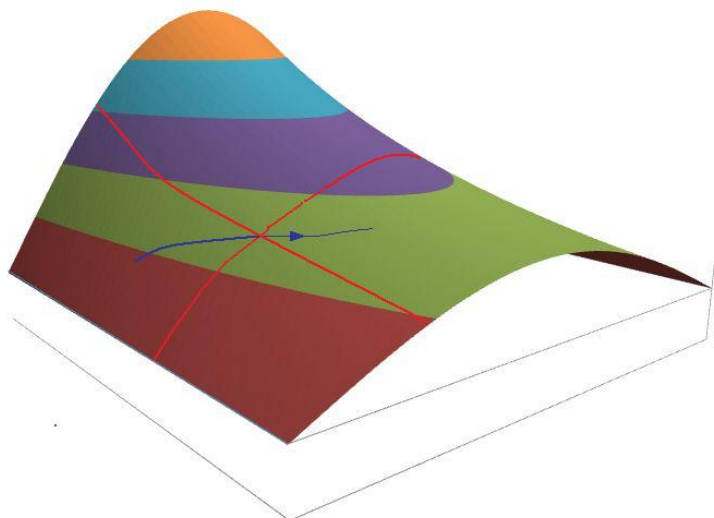
Spis treści

1	Gradient	1
1.1	Pochodna pola skalarnego	1
1.2	Gradient	3
1.3	Operator Hamiltona	4
2	Różniczkowanie pola wektorowego	5
2.1	Dywergencja	5
2.2	Wirowość	6
2.3	Złożone wyrażenia	7

1 Gradient

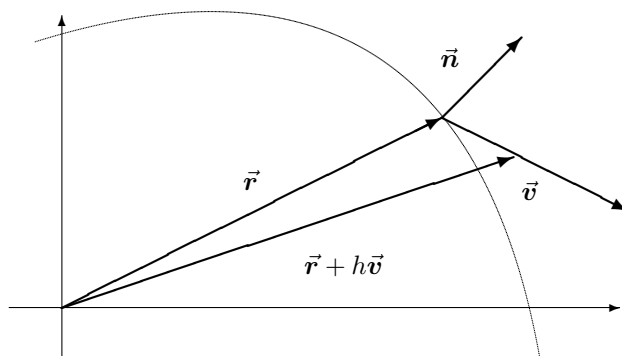
1.1 Pochodna pola skalarnego

POCHODNA POLA SKALARNEGO



POCHODNA POLA SKALARNEGO

Rzut na płaszczyznę



RÓŻNICZKOWANIE „PO WEKTORZE” PROBLEM

- Funkcja n zmiennych x_j , $j = 1, 2, \dots, x_n$, (x, y, z) jest funkcją $f(\vec{r})$ wektora $\vec{r} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ ($\vec{r} = [x, y, z]$).
- Czym jest nieskończenie mały wektor (różniczka $d\vec{r}$)?
- Dla przyrostu $\Delta\vec{r}$ wektora $\Delta f = f(\vec{r} + \Delta\vec{r}) - f(\vec{r})$.
- Ale czym jest iloraz różnicowy $\Delta f / \Delta\vec{r}$?

Przyjęte rozwiązanie

- W mianowniku ilorazu różnicowego musi być skalar, zatem

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{r} + h\vec{v}) - f(\vec{r})}{h}.$$

- Jeżeli $\vec{v} = v\hat{v}$, to

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = v \frac{\partial f}{\partial \hat{v}}.$$

PRZYKŁAD

$$f(x, y) = x^2y, \quad \vec{v} = [\alpha, \beta]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} f(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + \alpha h, y + \beta h) - f(x, y)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + \alpha h)^2(y + \beta h) - x^2y}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2x\alpha h + \alpha^2 h^2)(y + \beta h) - x^2y}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2y + x^2\beta h + 2xy\alpha h + 2x\alpha\beta h^2 + y\alpha^2 h^2 + \alpha^2\beta h^3 - x^2y}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (x^2\beta + 2xy\alpha + 2x\alpha\beta h + y\alpha^2 h + \alpha^2\beta h^2) \\ &= 2xy\alpha + x^2\beta = [\alpha, \beta] \cdot [2xy, x^2] \end{aligned}$$

POCHODNA POLA SKALARNEGO

Uwagi

- Używa się w tym przypadku symbolu pochodnej cząstkowej.
- Dla $\vec{v} = [a_1, 0, \dots, 0]$ otrzymujemy $\partial f / \partial x_1$ itd.
- Pochodna $\partial f / \partial \hat{v}$ wyraża szybkość zmiany funkcji f w kierunku wektora $\hat{v}$.
- Największą wartość ma pochodna $\partial f / \partial \hat{n}$, gdzie $\vec{n}$ jest wektorem normalnym do powierzchni równych wartości $f(\vec{r})$ o zwrocie zgodnym ze *wzrostem* wartości (patrz rys.).
- $$\frac{\partial f}{\partial \hat{v}} = \frac{\partial f}{\partial \hat{n}} \cos \angle(\hat{v}, \hat{n}).$$
- Czyli przypomina iloczyn skalarny $\vec{X} \cdot \hat{n}$.
- Czym jest wektor $\vec{X}$, taki że $|\vec{X}| = \frac{\partial f}{\partial \hat{n}}$???

1.2 Gradient

GRADIENT

Wielkość $\vec{X}$ nazywamy **gradientem pola skalarnego**, a zatem

Definicja

Gradientem pola skalarnego $U(\vec{r})$ nazywamy *wektor* (pole wektorowe)

- mający kierunek zgodny z kierunkiem normalnej do powierzchni równych wartości pola,
- zorientowany w kierunku wzrastania $U(\vec{r})$
- i mający długość $\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}$.

Wektor ten oznaczamy **grad** $U(\vec{r})$ lub $\nabla U(\vec{r})$.

Symbol ∇ omówiony będzie później.

ZWIĄZKI Z POPRZEDNIMI OKREŚLENIAМИ

- $\mathbf{grad} U = \hat{n} \frac{\partial U}{\partial \hat{n}}$
- $\frac{\partial U}{\partial \vec{v}} = \vec{v} \cdot \mathbf{grad} U$.
- W *kartezjańskim* układzie współrzędnych (prostokątnym)

$$\mathbf{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{z}.$$

- Różniczkę zupełną funkcji $U(\vec{r})$, $d\vec{r} = [dx, dy, dz]$,
$$dU = \mathbf{grad} U(\vec{r}) \cdot d\vec{r},$$

nazywamy **różniczką pola skalarnego**.

- Pojęcie gradientu można uogólnić na dowolną (skończoną) liczbę zmiennych

$$\mathbf{grad} U(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_j} \hat{x}_j.$$

WŁASNOŚCI

Ponieważ **grad** jest „pochodną”, zatem

- $\mathbf{grad}(\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2) = \alpha_1 \mathbf{grad} U_1 + \alpha_2 \mathbf{grad} U_2$;
- $\mathbf{grad}(U_1 U_2) = U_2 \mathbf{grad} U_1 + U_1 \mathbf{grad} U_2$;
- $\mathbf{grad} \phi(U) = \frac{d\phi}{dU} \mathbf{grad} U$;
- $\mathbf{grad}(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) = \dots$ za trudne, ale możliwe do wyznaczenia;
- w ekstremum (i nie tylko tam) $\partial U / \partial x = 0$, zatem w ekstremum $\mathbf{grad} U = \vec{0}$;
- Ponieważ $\mathbf{grad} U$ wskazuje, w jakim kierunku wartości $U(\vec{r})$ rosną *naj-
szybciej*, dlatego w fizyce dla pól **potencjalnych** mamy $\vec{F}(\vec{r}) \sim -\mathbf{grad} E_p(\vec{r})$
i $\vec{E}(\vec{r}) \sim -\mathbf{grad} V(\vec{r})$.

PRZYKŁADY

Gradienty prostych funkcji, $\vec{r} = [x, y, z]$

- $\mathbf{grad} r = \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$;
- $\mathbf{grad} r^2 = 2r \mathbf{grad} r = 2\vec{r}$;
- w szczególności dla $\vec{r} = [x, y]$ mamy paraboloidę obrotową;
- $\mathbf{grad} r^{-1} = -r^{-2} \mathbf{grad} r = -\frac{1}{r^2} \hat{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$;
- $\mathbf{grad} \ln(xyz) = \mathbf{grad}(\ln x + \ln y + \ln z) = x^{-1} + y^{-1} + z^{-1}$.
- $\mathbf{grad} \sin(xy) = [y \cos(xy), x \cos(xy)] = \cos(xy)[y, x] = \cos(xy) \mathbf{grad}(xy)$.
- Jeżeli U zależy tylko od $r = |\vec{r}|$ (pole środkowe, centralne), to $\mathbf{grad} U(r) = U'(r) \hat{r}$.

1.3 Operator Hamiltona

OPERATOR HAMILTONA

Oznaczenie

Obiekt, który działając na funkcję skalarną (operując na funkcji skalarnej) $U(\vec{r})$ daje funkcję wektorową $\vec{V}(\vec{r}) = \mathbf{grad} U(\vec{r})$ możemy uważać za *operator wektorowy*, tzn. taki „wektor”, którego współrzędnymi są „zwykłe” (skalarne) operatory. W rozpatrywanym przypadku możemy wprowadzić

$$\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right]$$

lub ogólniej

$$\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right].$$

OPERATOR ∇

Uwagi

- Nie piszemy ∇ , bo wszyscy wiemy, że nabla jest operatorem wektorowym.
- $\mathbf{grad} U(\vec{r}) = \nabla U(\vec{r})$, gdzie stosujemy *klasyczną* definicję iloczynu wektora i składową.
- Oczywiście wyrażenie $U(\vec{r})\nabla$ ma zupełnie inny sens, gdyż

$$U\nabla = \left[U \frac{\partial}{\partial x}, U \frac{\partial}{\partial y}, U \frac{\partial}{\partial z} \right],$$

- $\vec{v} \cdot \nabla$ należy rozumieć poprzez jego działanie na $U(\vec{r})$, czyli $\vec{v} \cdot \mathbf{grad} U$

$$v_x \frac{\partial U}{\partial x} + v_y \frac{\partial U}{\partial y} + v_z \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial \vec{v}}.$$

2 Różniczkowanie pola wektorowego

POLE WEKTOROWE I JEGO RÓŻNICZKOWANIE

Określenie

Pole wektorowe to **funkcja**, która każdemu wektorowi $\vec{r}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^n$) przyporządkowuje wektor $\vec{V}(\vec{r})$. Wektor $\vec{V}$ może w ogólności należeć do przestrzeni o innym wymiarze, $\vec{V}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Uwagi

- Funkcję $\vec{V}(\vec{r})$ możemy uważać za zestaw m funkcji składowych $V_j(\vec{r})$, $j = 1, 2, \dots, m$:
$$\vec{V}(\vec{r}) = [V_1(\vec{r}), V_2(\vec{r}), \dots, V_m(\vec{r})].$$
- Dla każdej z tych funkcji mamy n pochodnych cząstkowych; łącznie mamy nm funkcji pochodnych typu $\partial V_j(\vec{r})/\partial x_k$.
- Rozpatrzone dalej określenia dotyczą tylko dwóch szczególnych przypadków: (i) $n = m$ oraz (ii) $n = m = 3$.

2.1 Dywergencja

DYWERGENCJA POLA WEKTOROWEGO ($n = m$)

Definicja

- Bardzo formalna definicja dywergencji wymaga całki (powierzchniowej), więc sobie darujemy.
- Można przyjąć, że dywergencja jest określona jako **iloczyn skalarny** operatora ∇ i funkcji $\vec{V}(\vec{r})$, zatem we współrzędnych prostokątnych

$$\text{div } \vec{V}(\vec{r}) = \nabla \cdot \vec{V}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V_j(\vec{r})}{\partial x_j}.$$

- W szczególności dla $n = 3$

$$\text{div } \vec{V}(x, y, z) = \frac{\partial V_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial V_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial V_z(x, y, z)}{\partial z}.$$

Źródła pola wektorowego

Uwagi

1. Dywergencję nazywamy także **rozbieżnością** pola.
2. Pola wytwarzane przez masę lub ładunek punktowy mają rozbieżność tylko tam, gdzie te ładunki, czyli źródła pola, się znajdują, gdyż $\operatorname{div} \vec{r} r^{-3} = 0$ poza $r = 0$.
3. Ale dla rozkładów ciągłych mamy prawo Gaussa $\operatorname{div} \vec{E} \sim \rho$.
4. Dlatego $\operatorname{div} \vec{V}$ nazywamy także **źródłowością** pola $\vec{V}$.

Uwagi

1. Dywergencja ma takie własności jak inne operatory różniczkowania.
2. W szczególności $\operatorname{div}(U\vec{V}) = \operatorname{grad} U \cdot \vec{V} + U \operatorname{div} \vec{V}$.
3. $\operatorname{div}(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2)$ za chwilę...

PRZYKŁADY (i inne rzeczy do omówienia)

- $\operatorname{div} \vec{r} = \operatorname{div}[x, y, z] = \partial x/\partial x + \partial y/\partial y + \partial z/\partial z = 3$ (w n wymiarach n).
- $\operatorname{div} \phi(r)\vec{r} = \operatorname{grad} \phi(r) \cdot \vec{r} + 3\phi(r) = \phi'(r)\hat{r} \cdot \vec{r} + 3\phi(r) = r\phi'(r) + 3\phi(r)$.
- $\operatorname{div} \hat{r} = \operatorname{div} r^{-1}\vec{r} = r(-r^{-2}) + 3r^{-1} = 2r^{-1}$.
- Ponieważ $\vec{E} = \alpha \operatorname{grad} V$, zatem $\operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div}(\alpha \operatorname{grad} V) = \alpha(\nabla \cdot \nabla V) = \alpha \nabla^2 V$.
- $\nabla^2 = \Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \dots + \partial^2/\partial x_n^2$ nazywamy operatorem Laplace'a (laplasjanem).
- Sprawdzamy

$$\nabla \cdot \nabla V = \nabla \cdot \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right] = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial V}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial V}{\partial x_n}$$

2.2 Wirowość

ROTACJA POLA WEKTOROWEGO ($n = m = 3$)

Definicja z uwagami

- **Rotację (wirowość)** pola wektorowego możemy rozpatrywać jako iloczyn wektorowy $\nabla \times \vec{V}(\vec{r})$.
- Ponieważ iloczyn ten zdefiniowaliśmy tylko w $\mathbb{R}^3$, zatem $n = 3$.
- We współrzędnych prostokątnych mamy zatem
$$(\operatorname{rot} \vec{V}(\vec{r}))_x = (\nabla \times \vec{V}(\vec{r}))_x = \frac{\partial}{\partial y} V_z(\vec{r}) - \frac{\partial}{\partial z} V_y(\vec{r}).$$
- Podstawowe własności jak zwykle.
- $\operatorname{rot}(U\vec{V}) = \operatorname{grad} U \times \vec{V} + U \operatorname{rot} \vec{V}$.

INNE ZWIĄZKI (jako przykłady, nie do zakucia)

- $\nabla \cdot (\vec{V}_1 \times \vec{V}_2) = (\text{rot } \vec{V}_1) \cdot \vec{V}_2 - \vec{V}_1 \cdot \text{rot } \vec{V}_2$.
- $\text{grad } (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)$ i $\text{rot } (\vec{V}_1 \times \vec{V}_2)$ wymagają rozpatrzenia symbolu $(\vec{V}_1 \cdot \nabla) \vec{V}_2$ (było $(\vec{v} \cdot \nabla)U$).
- Poprawna interpretacja (dla dwóch zmiennych)

$$(\vec{a} \cdot \nabla)[V_x, V_y] = (a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y})[V_x, V_y] = [\vec{a} \cdot \nabla V_x, \vec{a} \cdot \nabla V_y]$$

$$= \left[\frac{\partial V_x}{\partial \vec{a}}, \frac{\partial V_y}{\partial \vec{a}} \right] = \frac{\partial}{\partial \vec{a}}[V_x, V_y] = \frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{a}}$$
- Jest to zatem pochodna $\vec{V}(\vec{r})$ względem $\vec{a}$.
- $\nabla(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) = (\vec{V}_1 \cdot \nabla) \vec{V}_2 + (\vec{V}_2 \cdot \nabla) \vec{V}_1 + \vec{V}_1 \times (\nabla \times \vec{V}_2) + \vec{V}_2 \times (\nabla \times \vec{V}_1)$.
- $\nabla \times (\vec{V}_1 \times \vec{V}_2) = (\vec{V}_2 \cdot \nabla) \vec{V}_1 - (\vec{V}_1 \cdot \nabla) \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \text{div } \vec{V}_2 - \vec{V}_2 \text{div } \vec{V}_1$.

2.3 Złożone wyrażenia

Działanie ∇ na $\vec{X} * \vec{Y} * \vec{Z}$ itp.

- Dany jest iloczyn $X * Y * Z$ funkcji.
- Każda z nich może być funkcją skalarną bądź wektorową.
- Gwiazdka oznacza dowolny symbol ($\bullet$ lub $\times$) dający poprawne wyrażenie.
- Jak wyliczyć $\nabla * (X * Y * Z)$?
 1. Stosujemy wzór Laplace'a pomijając symbol działania:

$$\nabla XYZ = \nabla \underline{X}YZ + \nabla X\underline{Y}Z + \nabla XY\underline{Z}.$$
 2. Uwzględniając własności iloczynów modyfikujemy wyrażenie, aby każdy składnik miał postać $A * B * \dots * C * \nabla * \underline{D}$.
- W wyrażeniach zawierających kilka operatorów ∇ możemy stosować prawa iloczynów wektorowych (o zastrzeżeniach dalej).

WAŻNE WZORY (dla funkcji o ciągłych II pochodnych)

- $\text{div rot } \vec{V} = 0$ ($\text{rot } \vec{V}$ jest polem **bezźródłowym**).
- $\text{rot grad } U = \vec{0}$ ($\text{grad } U$ jest polem bezwirowym).
- $\nabla \cdot (\nabla U) = \text{div grad } U = \Delta U$.
- Ale też $\Delta \vec{V} = [\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n]$.

- **rot rot $\vec{V}$:**

1. Korzystamy ze wzoru $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

2. $\nabla \times (\nabla \times \vec{V}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{V}) - (\nabla \cdot \nabla)\vec{V},$

- czyli **rot rot $V = \text{grad div } \vec{V} - \Delta \vec{V}$.**

- Ta własność może służyć do wyprowadzenia równania fali elektromagnetycznej z równań Maxwella.

- Trzeba tylko uwzględnić drugą pochodną po czasie

- i rozpatrywać operator d'Alemberta: $\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$