1 Tensory polaryzacji

Interesujące nas funkcje to:

$$\epsilon^i_\alpha \epsilon^{*i}_\beta (A+B)^{\mu\alpha}(A+B)^{\nu\beta *}$$

gdzie $A^{\mu\alpha}$ i $B^{\mu\alpha}$ fragmenty amplitud z rysunków odpowiednio 1a oraz 1b. Chcemy rozróżnić emisję bozonów podłużnych od emisji poprzecznych, więc będziemy liczyć funkcje:

$$P^Y_{\alpha\beta}(A+B)^{\mu\alpha}(A+B)^{\nu\beta *} \tag{1}$$

gdzie: $Y = T, L$, a $P^T_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{2} \epsilon^i_\alpha \epsilon^{*i}_\beta$ i $P^L_{\alpha\beta} = \epsilon^3_\alpha \epsilon^{*3}_\beta$ to wkład do licznika propagatora bozonu W od wymiany bozonów odpowiednio: poprzecznych i podłużnych. Warto zauważyć, że $P^Y_{\alpha\beta}$ są macierzami symetrycznymi. Po pominięciu mas kwarków funkcja $(A+B)^{\mu\alpha}$ zwężona z czteropędem bozonu l_α daje zero:

$$(A+B)^{\mu\alpha} l_\alpha = 0, \tag{2}$$

więc dodanie do macierzy $P^Y_{\alpha\beta}$ macierzy $l_{\{\alpha}a_{\beta\}}$ (gdzie a_β jest dowolnym czterowektorem) nie zmienia końcowego wyniku czyli funkcji (1). Żeby odtworzyć wynik, który dostaje się przy liczeniu funkcji z emisją gluonu chcemy znaleźć wektory n^Y_β takie, że:

$$\int \frac{l_{\{\alpha}n^Y_{\beta\}}}{l \cdot n^Y} A^{\mu\alpha *} A^{\nu\beta} \approx \int P^Y_{\alpha\beta}\left(A^{\mu\alpha}B^{\nu\beta *} + B^{\mu\alpha}A^{\nu\beta *} + B^{\mu\alpha}B^{\nu\beta *}\right),$$

gdzie "$\int$" oznacza całkę po przestrzeni fazowej końcowego kwarku i bozonu, a "$\approx$" jest równością wiodących logarytmów. Otrzymamy wtedy:

$$\int P^Y_{\alpha\beta}(A+B)^{\mu\alpha}(A+B)^{\nu\beta *} \approx \int P'^Y_{\alpha\beta} A^{\mu\alpha}A^{\nu\beta *},$$

gdzie: $P'^Y_{\alpha\beta} = P^Y_{\alpha\beta} + \frac{l_{\{\alpha}n^Y_{\beta\}}}{l\cdot n^Y}$.

Wektor polaryzacji podłuznej można rozpisać jako:

$$\epsilon^3_\alpha = \frac{l_\alpha}{\sqrt{l^2}} + n^3_\alpha$$

gdzie: $n^3_\alpha = \frac{|\vec{l}|-l_0}{l^2}(1, -\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|})$ jest wektorem zerowym ($n^3_\alpha n^{3\alpha} = 0$), więc tensor $P^L_{\alpha\beta}$ można rozpisać następująco:

$$P^L_{\alpha\beta} = \frac{l_\alpha l_\beta}{l^2} + \frac{l_{\{\alpha}n^3_{\beta\}}}{\sqrt{l^2}} + n^3_\alpha n^3_\beta. \tag{3}$$

Wiemy, że:

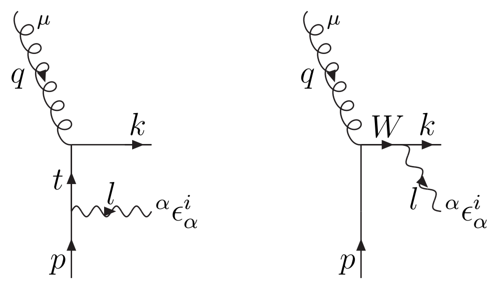
$$\sum_{i=1}^{3} \epsilon^i_\alpha \epsilon^{*i}_\beta = P^T_{\alpha\beta} + P^L_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{l_\alpha l_\beta}{l^2}. \tag{4}$$

Korzystając z (3) i (4) mamy:

$$P^T_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} - \frac{l_{\{\alpha}n^3_{\beta\}}}{\sqrt{l^2}} - n^3_\alpha n^3_\beta. \tag{5}$$

Używając własności 2 dostaniemy:

$$P^L_{\alpha\beta}(A+B)^{\mu\alpha}(A+B)^{\nu\beta *} = n^3_\alpha n^3_\beta (A+B)^{\mu\alpha}(A+B)^{\nu\beta *}$$
$$P^T_{\alpha\beta}(A+B)^{\mu\alpha}(A+B)^{\nu\beta *} = (-g_{\alpha\beta} - P^L_{\alpha\beta})(A+B)^{\mu\alpha}(A+B)^{\nu\beta *}$$



(a) (b)

Rysunek 1: Diagramy przedstawiające rozpatrywane fragmenty amplitud: a) $A^{\mu\alpha}\epsilon^i_\alpha$, b) $B^{\mu\alpha}\epsilon^i_\alpha$.

2 Kinematyka

q - czteropęd wchodzącego gluonu off shell, q^2 - dowolne,
p - czteropęd wchodzącego kwarku on shell, $p^2 = 0$ - pomijamy masy kwarków,
k - czteropęd wychodzącego kwarku on shell, $k^2 = 0$ - pomijamy masy kwarków,
l - czteropęd wychodzącego bozonu wektorowego on shell, $l^2 = M_V^2$.
Zasada zachownia: $p + q = k + l$.
Czteropędy wewnętrzne: $t := p - l = k - q$, $W := p + q = k + l$.

Iloczyny skalarne czterowektorów dają:

$$\begin{aligned}(p \cdot t) &= -(p \cdot l) = \frac{1}{2}(y - M_V^2),\\ (k \cdot t) &= -(k \cdot q) = \frac{1}{2}(y - q^2),\\ (p \cdot k) &= \frac{1}{2}(y + W^2 - q^2 - M_V^2).\end{aligned} \tag{6}$$

Przekroje czynne będziemy całkować po przestrzeni fazowej cząstek wychodzących (wykonując całki z deltami):

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} 2\pi\delta_+(l^2 - M_V^2) \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} 2\pi\delta_+(k^2)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p + q - k - l) = \int \frac{\vec{l}^2 d(\cos\theta) d\phi}{(2\pi)^2 2l_0 2k_0}$$

gdzie θ i ϕ to kąty wektora $\vec{l}$ w układzie biegunowym. Jeśli obrócimy układ tak aby wektor $\vec{p}$ był wzdłuż osi z mamy:

$$y := t^2 = l^2 - 2(p \cdot l) = M_V^2 - 2p_0 l_0 + 2p_0|\vec{l}|\cos\theta, \tag{7}$$

a całka przyjmuje postać:

$$\int \frac{\vec{l}^2 d(\cos\theta) d\phi}{(2\pi)^2 2l_0 2k_0} = \int_0^1 \frac{\vec{l}^2 d(\cos\theta)}{8\pi l_0 k_0} = \frac{|\vec{l}|}{16\pi l_0 k_0 |\vec{p}|} \int_{y_0}^{y_1} dy,$$

gdzie: $y_0 = M_V^2 - 2p_0 l_0$, $y_1 = M_V^2 + 2p_0(|\vec{l}| - l_0)$. Całki jakie pojawiają się w rachunkach to:

$$\int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{y^2} = \frac{2p_0|\vec{l}|}{\left[M_V^2 + 2p_0(|\vec{l}| - l_0)\right]\left[M_V^2 - 2p_0 l_0\right]}, \tag{8}$$

$$\int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{y} = \log\left|1 + \frac{2p_0|\vec{l}|}{M_V^2 - 2p_0 l_0}\right|, \tag{9}$$

$$\int_{y_0}^{y_1} dy = 2p_0|\vec{l}|, \tag{10}$$

$$\int_{y_0}^{y_1} dy y = 2p_0|\vec{l}|\left[M_V^2 + p_0(|\vec{l}| - 2l_0)\right], \tag{11}$$

2.1 Wektor ustalający cechowanie

Wybierając wektor ustalający cechowanie jako wektor zerowy, którego część przestrzenna ma ten sam kierunek i przeciwny zwrot co $\vec{p}$ mamy:

$$\begin{aligned}
y' :=& (n \cdot l) = n_0(l_0 + |\vec{l}| \cos\theta) = \frac{n_0}{2p_0}\left(y - M_V^2 + 4p_0 l_0\right), \\
dy' =& \frac{n_0}{2p_0} dy, \\
\int \frac{\vec{l}^2 d(\cos\theta) d\phi}{(2\pi)^2 2l_0 2k_0} =& \frac{|\vec{l}|}{16\pi l_0 k_0 p_0} \int_{y_0}^{y_1} dy = \frac{2|\vec{l}|}{16\pi l_0 k_0 n_0} \int_{y_0'}^{y_1'} dy'
\end{aligned} \tag{12}$$

gdzie: $y_0' = n_0 l_0$, $y_1' = n_0(|\vec{l}| + l_0)$. Mamy też:

$$\frac{y}{y'} = \frac{2p_0}{n_0} + \frac{M_V^2 + 4p_0 l_0}{y'}, \tag{13}$$

$$\frac{1}{yy'} = \frac{1}{M_V^2 + 4p_0 l_0}\left(\frac{1}{y'} - \frac{2p_0}{n_0}\frac{1}{y}\right). \tag{14}$$

W rachunkach pojawia się całka:

$$\int_{y_0'}^{y_1'} \frac{dy'}{y'} = \log\left|1 + \frac{|\vec{l}|}{l_0}\right|. \tag{15}$$

3 Fragmenty przekrojów czynnych

Rozpatrywane funkcje można policzyć używając następującego tensora:

$$X^{\alpha\beta\mu\nu}(p, t_1, k, t_2) = \frac{1}{2}\frac{1}{t_1^2 t_2^2} Tr\left\{\not{p}\gamma^\alpha (C_V + C_A\gamma_5)\ \not{t}_1 \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu\ \not{t}_2 \gamma^\beta (C_V + C_A\gamma_5)\right\}. \tag{16}$$

Warto zauważyć pewną własność tego tensora:

$$X^{\alpha\beta\mu\nu}(p, t_1, k, t_2) = X^{\mu\nu\beta\alpha}(k, t_2, p, t_1). \tag{17}$$

Korzystając z tożsamości: $\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma = \gamma^\alpha g^{\beta\gamma} + \gamma^\gamma g^{\alpha\beta} - \gamma^\beta g^{\alpha\gamma} - i\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma_\delta\gamma_5$ oraz zbierając macierze $(C_V + C_A\gamma_5)$ w jedno miejsce mamy.

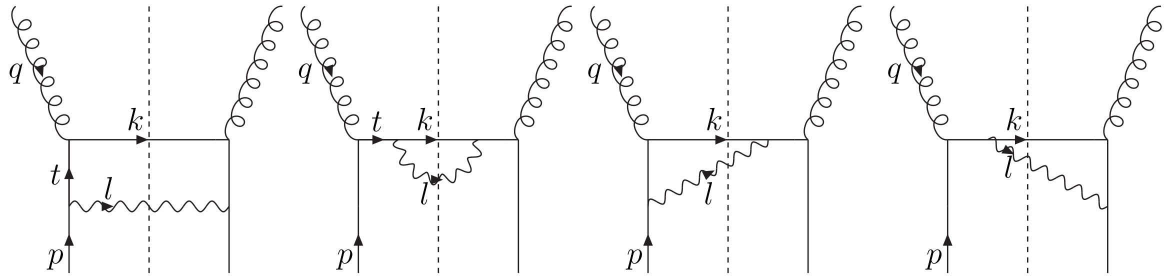
$$\begin{aligned}
&X^{\alpha\beta\mu\nu}(p, t_1, k, t_2) = \\
&\frac{1}{2}\frac{1}{t_1^2 t_2^2} Tr\left\{(C_S' + C_A'\gamma_5)\left[S^{\alpha\rho}(p, t_1) + A^{\alpha\rho}(p, t_1)\gamma_5\right]\gamma_\rho\gamma^\mu\left[S^{\nu\delta}(k, t_2) + A^{\nu\delta}(k, t_2)\gamma_5\right]\gamma_\delta\gamma^\beta\right\},
\end{aligned}$$

gdzie: $C_S' = C_V^2 + C_A^2$, $C_A' = 2C_V C_A$,

$$\begin{array}{rll}
S^{\alpha\beta}(a, b) = & a^{\{\alpha}b^{\beta\}} - (a \cdot b)g^{\alpha\beta} & \text{- symetryczne w } (\alpha, \beta), \\
A^{\alpha\beta}(a, b) = & i\epsilon^{\alpha\gamma\beta\delta}a_\gamma b_\delta & \text{- antysymetryczne w } (\alpha, \beta).
\end{array} \tag{18}$$

Znów zbierając czynniki z γ_5 w jedno miejsce dostaniemy:

$$X^{\alpha\beta\mu\nu}(p, t_1, k, t_2) = \frac{1}{2}\frac{1}{t_1^2 t_2^2} Tr\left\{(D_V^{\alpha\rho\nu\delta}(p, t_1, k, t_2) + D_A^{\alpha\rho\nu\delta}(p, t_1, k, t_2)\gamma_5)\gamma_\rho\gamma^\mu\gamma_\delta\gamma^\beta\right\},$$



Rysunek 2: Diagramy przedstawiające rozpatrywane fragmenty przekrojów czynnych: a) ladder, b) energia własna, c) wierzchołki.

gdzie:

$$\begin{aligned}
D_V^{\alpha\rho\nu\delta}(p,t_1,k,t_2) &= C'_S\left[S^{\alpha\rho}(p,t_1)\,S^{\nu\delta}(k,t_2) + A^{\alpha\rho}(p,t_1)\,A^{\nu\delta}(k,t_2)\right] + \\
&\quad + C'_A\left[A^{\alpha\rho}(p,t_1)\,S^{\nu\delta}(k,t_2) + S^{\alpha\rho}(p,t_1)\,A^{\nu\delta}(k,t_2)\right], \\
D_A^{\alpha\rho\nu\delta}(p,t_1,k,t_2) &= C'_A\left[S^{\alpha\rho}(p,t_1)\,S^{\nu\delta}(k,t_2) + A^{\alpha\rho}(p,t_1)\,A^{\nu\delta}(k,t_2)\right] + \\
&\quad + C'_S\left[A^{\alpha\rho}(p,t_1)\,S^{\nu\delta}(k,t_2) + S^{\alpha\rho}(p,t_1)\,A^{\nu\delta}(k,t_2)\right].
\end{aligned}$$

Korzystając z tożsamości:

$$\begin{aligned}
Tr\left\{\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta\right\} &= 4\left(g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta} + g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma} - g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}\right), \\
Tr\left\{\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta\gamma_5\right\} &= 4i\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}.
\end{aligned}$$

mamy:

$$\begin{aligned}
X^{\alpha\beta\mu\nu}(p,t_1,k,t_2) &= 2\frac{1}{t_1^2t_2^2}\left[D_V^{\alpha\rho\nu\delta}(p,t_1,k,t_2)(\delta^\mu_\rho\delta^\beta_\delta + \delta^\beta_\rho\delta^\mu_\delta - g_{\rho\delta}g^{\mu\beta}) + iD_A^{\alpha\rho\nu\delta}(p,t_1,k,t_2)\epsilon_\rho{}^\mu{}_\delta{}^\beta\right] = \\
&= 2\frac{1}{t_1^2t_2^2}\left[D_V^{\alpha\{\mu\nu\beta\}}(p,t_1,k,t_2) - g^{\mu\beta}D_V^{\alpha\rho}{}_\rho{}^\nu(p,t_1,k,t_2) + iD_A^{\alpha\rho\nu\delta}(p,t_1,k,t_2)\epsilon_\rho{}^\mu{}_\delta{}^\beta\right].
\end{aligned}$$

3.1 Ladder diagram

Diagram 2a to: $P^Y_{\alpha\beta}A^{\mu\alpha*}A^{\nu\beta}$. Tensor $A^{\mu\alpha*}A^{\nu\beta}$ można otrzymać z tensora (16) licząc: $A^{\mu\alpha*}A^{\nu\beta} = X^{\alpha\beta\mu\nu}(p,t,k,t)$, gdzie $t = p - l = k - q$. Pamiętając o symetrii macierzy $P^Y_{\alpha\beta}$ mamy:

$$\frac{1}{2}X^{\{\alpha\beta\}\mu\nu}(p,t,k,t) = \frac{2}{t^4}\sum_{Z=S,A}C'_Z\left(p^{\{\alpha}\delta^{\beta\}}_\rho - g^{\alpha\beta}p_\rho\right)X_Z^{\rho\mu\nu}(t,k), \tag{19}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
X_S^{\rho\mu\nu}(b,c) &= 2b^\rho S^{\mu\nu}(b,c) - b^2(c^{\{\mu}g^{\nu\}\rho} - g^{\mu\nu}c^\rho) \quad \text{- symetryczne w } (\mu,\nu), \\
X_A^{\rho\mu\nu}(b,c) &= 2b^\rho A^{\mu\nu}(b,c) - b^2 i\epsilon^{\lambda\mu\rho\nu}c_\rho \quad \text{- antysymetryczne w } (\mu,\nu).
\end{aligned} \tag{20}$$

Analiza diagramu 2a wymaga policzenia trzech funkcji.

$$g_{\alpha\beta}X^{\alpha\beta\mu\nu}(p,t,k,t) = -\frac{4}{t^4}\sum_{Z=S,A}C'_ZX_Z^{\mu\nu}(p,t,k) \tag{21}$$

gdzie:

$$X_Z^{\mu\nu}(a,b,c) \quad = a_\rho X_Z^{\rho\mu\nu}(b,c) \quad = 2(a\cdot b)Z^{\mu\nu}(b,c) - b^2 Z^{\mu\nu}(c,a) \quad \text{dla: } Z = S, A. \tag{22}$$

Funkcji:

$$n_\alpha n_\beta X^{\alpha\beta\mu\nu}(p,t,k,t) = \frac{4}{t^4}(p\cdot n)\sum_{Z=S,A} C'_Z X_Z^{\mu\nu}(n,t,k) \tag{23}$$

gdzie n to wektor zerowy ($n^2=0$); oraz funkcji:

$$\frac{l_{\{\alpha}n_{\beta\}}}{l\cdot n}X^{\alpha\beta\mu\nu}(p,t,k,t) = \\ = \frac{4}{t^4(l\cdot n)}\sum_{Z=S,A} C'_Z\left\{(p\cdot l)X_Z^{\mu\nu}(n,t,k) + (p\cdot n)X_Z^{\mu\nu}(l,t,k) - (l\cdot n)X_Z^{\mu\nu}(p,t,k)\right\}, \tag{24}$$

3.2 Diagram z energią własną

Diagram 2b to: $P^Y_{\alpha\beta}B^{\mu\alpha *}B^{\nu\beta}$. Tensor $B^{\mu\alpha *}B^{\nu\beta}$ można otrzymać z tensora (16) licząc: $B^{\mu\alpha *}B^{\nu\beta} = X^{\mu\nu\alpha\beta}(p,W,k,W)$, gdzie $W = p+q = k+l$. Możemy to zrobić wykorzystując (19) oraz własność (17):

$$\frac{1}{2}X^{\mu\nu\{\alpha\beta\}}(p,W,k,W) = \frac{1}{2}X^{\{\alpha\beta\}\nu\mu}(k,W,p,W) = \\ = \frac{2}{W^4}\sum_{Z=S,A} C'_Z\left(k^{\{\alpha}\delta^{\beta\}}_\rho - g^{\alpha\beta}k_\rho\right)X_Z^{\rho\mu\nu}(W,p). \tag{25}$$

Podobnie jak poprzednio musimy policzyć trzy funkcje (korzystając z (21) i (17)):

$$g_{\alpha\beta}X^{\mu\nu\alpha\beta}(p,W,k,W) = g_{\alpha\beta}X^{\alpha\beta\nu\mu}(k,W,p,W) = -\frac{4}{W^4}\sum_{Z=S,A} C'_Z X_Z^{\nu\mu}(k,W,p), \tag{26}$$

korzystając z (23) i (17):

$$n_\alpha n_\beta X^{\mu\nu\alpha\beta}(p,W,k,W) = n_\alpha n_\beta X^{\alpha\beta\nu\mu}(k,W,p,W) = \frac{4}{W^4}(k\cdot n)\sum_{Z=S,A} C'_Z X_Z^{\mu\nu}(n,t,p) \tag{27}$$

oraz (korzystając z (24) i (17)):

$$\frac{l_{\{\alpha}n_{\beta\}}}{l\cdot n}X^{\mu\nu\alpha\beta}(p,W,k,W) = \frac{l_{\{\alpha}n_{\beta\}}}{l\cdot n}X^{\alpha\beta\nu\mu}(k,W,p,W) = \\ = \frac{4}{W^4(l\cdot n)}\sum_{Z=S,A} C'_Z\left\{(k\cdot l)X_Z^{\nu\mu}(n,W,p) + (k\cdot n)X_Z^{\nu\mu}(l,W,p) - (l\cdot n)X_Z^{\nu\mu}(k,W,p)\right\}. \tag{28}$$

3.3 Diagramy z poprawką wierzchołkową

Diagramy 2c to: $P^Y_{\alpha\beta}A^{\mu\alpha}B^{\nu\beta *}$ oraz: $P^Y_{\alpha\beta}B^{\mu\alpha}A^{\nu\beta *}$. Tensor $A^{\mu\alpha}B^{\nu\beta *}$ można otrzymać z tensora (16) licząc: $A^{\mu\alpha}B^{\nu\beta *} = X^{\mu\beta\alpha\nu}(p,W,k,t)$. Pamiętając o symetrii macierzy $P^Y_{\alpha\beta}$ mamy:

$$\frac{1}{2}X^{\mu\{\beta\alpha\}\nu}(p,W,k,t) = \frac{1}{t^2W^2}\left[D_V^{\mu\{\alpha}{}^{\nu\beta\}}(p,W,k,t) - g^{\alpha\beta}D_V^{\mu\rho}{}_\rho{}^\nu(p,W,k,t)\right]. \tag{29}$$

Tensor $B^{\mu\alpha}A^{\nu\beta *}$ otrzymamy z powyższego (29) sprzęgając go zespolenie i zmieniając $\mu\leftrightarrow\nu$.

Podobnie jak poprzednio musimy policzyć trzy funkcje:

$$g_{\alpha\beta}X^{\mu\beta\alpha\nu}(p,W,k,t) = -\frac{2}{t^2W^2}D_V^{\mu\rho}{}_\rho{}^\nu(p,W,k,t), \tag{30}$$

$$n_\alpha n_\beta X^{\mu\beta\alpha\nu}(p,W,k,t) = \frac{2}{t^2W^2}n_\alpha n_\beta D_V^{\mu\alpha\nu\beta}(p,W,k,t), \tag{31}$$

$$\frac{l_{\{\alpha}n_{\beta\}}}{l\cdot n}X^{\mu\beta\alpha\nu}(p,W,k,t) = \frac{2}{t^2W^2}\left[\frac{l_{\{\alpha}n_{\beta\}}}{l\cdot n}D_V^{\mu\alpha\nu\beta}(p,W,k,t) - D_V^{\mu\rho}{}_\rho{}^\nu(p,W,k,t)\right]. \tag{32}$$

4 Funkcje struktury

Najogólniejsza postać jaką może przyjąć tensor: $W^{Y\mu\nu}(p,q) := \int P^Y_{\alpha\beta}(A+B)^{\mu\alpha}(A+B)^{\nu\beta *}$ to:

$$\begin{aligned} W^{Y\mu\nu}(p,q) = &- g^{\mu\nu}W_1^Y(x,q^2) + \frac{p^\mu p^\nu}{p\cdot q}W_2^Y(x,q^2) + i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\frac{p_\rho q_\sigma}{p\cdot q}W_3^Y(x,q^2) + \\ &+ \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}W_4^Y(x,q^2) + \frac{p^{\{\mu}q^{\nu\}}}{p\cdot q}W_5^Y(x,q^2) + i\frac{p^{[\mu}q^{\nu]}}{p\cdot q}W_6^Y(x,q^2), \end{aligned} \tag{33}$$

gdzie: $x = \frac{-q^2}{2p\cdot q}$.

Tensor $W^{Y\mu\nu}(p,q)$ będzie zwężany z tensorem $L_{\mu\nu}(p',q) = Tr[\not p'\gamma_\mu(\not p' - \not q)\gamma_\nu] = S_{\mu\nu}(p', p'-q)$ jeśli interesuje nas odziaływanie, w którym drugi kwark nic nie emituje, lub z drugim tensorem $W^{Y'}_{\mu\nu}(p',-q)$ jeśli oba kwarki wymieniające gluon mają emitować bozon wektorowy. Zarówno $L_{\mu\nu}(p',q)q^\mu = L_{\mu\nu}(p',q)q^\nu = 0$ jak i $W^{Y'}_{\mu\nu}(p',-q)q^\mu = W^{Y'}_{\mu\nu}(p',-q)q^\nu = 0$, więc współczynniki W_4, W_5, W_6 nie wpływają na ostateczny wynik i możemy je wybrać tak aby:

$$\begin{aligned} W^{Y\mu\nu}(p,q) = &-\left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right)W_1^Y(x,q^2) + \\ &+ \frac{1}{p\cdot q}\left(p^\mu - q^\mu\frac{p\cdot q}{q^2}\right)\left(p^\nu - q^\nu\frac{p\cdot q}{q^2}\right)W_2^Y(x,q^2) + \\ &+ i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\frac{p_\rho q_\sigma}{p\cdot q}W_3^Y(x,q^2). \end{aligned} \tag{34}$$

Współczynniki W_1, W_2, W_3 możemy wyliczyć z następujących zwężeń:

$$g_{\mu\nu}W^{Y\mu\nu}(p,q) = -3W_1^Y(x,q^2) + \left(1+\frac{1}{y}\right)W_2^Y(x,q^2) \tag{35}$$

$$\frac{p_\mu p_\nu}{p\cdot q}W^{Y\mu\nu}(p,q) = -\frac{1}{2y}W_1^Y(x,q^2) + \frac{1}{4y^2}W_2^Y(x,q^2) \tag{36}$$

$$i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\frac{p^\rho q^\sigma}{p\cdot q}W^{Y\mu\nu}(p,q) = 2(p\cdot q)W_3^Y(x,q^2). \tag{37}$$

4.1 Ladder diagram

Używając tożsamości:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}X_S^{\mu\nu}(a,b,c) &= -2X_-(a,b,c) \\ p_\mu p_\nu X_S^{\mu\nu}(a,b,c) &= 2(p\cdot c)X_-(a,b,p) \\ i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}p^\rho q^\sigma X_A^{\mu\nu}(a,b,c) &= 2\left[(q\cdot c)X_+(a,b,p) - (p\cdot c)X_+(a,b,q)\right] \\ g_{\mu\nu}X_A^{\mu\nu}(a,b,c) = p_\mu p_\nu X_A^{\mu\nu}(a,b,c) &= i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\rho q_\sigma X_S^{\mu\nu}(a,b,c) = 0, \end{aligned} \tag{38}$$

gdzie $X_\pm(a,b,c) := 2(a\cdot b)(b\cdot c) \pm b^2(c\cdot a)$, dostaniemy dla (21):

$$g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}X^{\alpha\beta\mu\nu}(p,t,k,t) = \frac{8}{t^4}C'_S X_-(p,t,k) = 4C'_S\left(\frac{q^2M_V^2}{y^2} - \frac{W^2}{y}\right) \tag{39}$$

$$\begin{aligned} p_\mu p_\nu g_{\alpha\beta}X^{\alpha\beta\mu\nu}(p,t,k,t) &= -\frac{8}{t^4}C'_S(p\cdot k)X_-(p,t,p) = -\frac{16}{t^4}C'_S(p\cdot k)(p\cdot t)^2 = \\ = -2C'_S&\left[y + (W^2 - q^2 - 3M_V^2) + (3M_V^2 + 2q^2 - 2W^2)\frac{M_V^2}{y} + (W^2 - q^2 - M_V^2)\frac{M_V^4}{y^2}\right] \end{aligned} \tag{40}$$

$$i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}p^\rho q^\sigma g_{\alpha\beta}X^{\alpha\beta\mu\nu}(p,t,k,t) = -\frac{8}{t^4}C'_A\left[(q\cdot k)X_+(p,t,p) - (p\cdot k)X_+(p,t,q)\right], \tag{41}$$

dla (24):

$$
\begin{aligned}
&g_{\mu\nu}\frac{l_{\{\alpha}n_{\beta\}}}{l\cdot n}X^{\alpha\beta\mu\nu}(p,t,k,t)= \\
&=-\frac{8}{t^4(l\cdot n)}C'_S\left[(p\cdot l)X_-(n,t,k)+(p\cdot n)X_-(l,t,k)-(l\cdot n)X_-(p,t,k)\right]= \\
&=-4C'_S\left\{[(q\cdot n)-(p\cdot n)]\frac{1}{y'}+(W^2-q^2)\frac{1}{y}+[(2q^2-W^2)(p\cdot n)-M_V^2(q\cdot n)]\frac{1}{yy'}\right\},
\end{aligned}
\tag{42}
$$

gdzie: $y'=(l\cdot n)$.

$$
\begin{aligned}
&p_\mu p_\nu\frac{l_{\{\alpha}n_{\beta\}}}{l\cdot n}X^{\alpha\beta\mu\nu}(p,t,k,t)= \\
&=\frac{8}{t^4(l\cdot n)}C'_S(p\cdot k)\left[(p\cdot l)X_-(n,t,p)+(p\cdot n)X_-(l,t,p)-(l\cdot n)X_-(p,t,p)\right]=0,
\end{aligned}
\tag{43}
$$

więc wkład tego diagramu do funkcji $\frac{p_\mu p_\nu}{p\cdot q}W^{Y\mu\nu}(p,q)$ jest sam z siebie niezmienniczy ze względu na cechowanie, jest tak ponieważ, jak policzymy dalej, pozostałe diagramy w ogóle (niezależnie od cechowania) nie dają wkładu do tej funkcji.

$$
\begin{aligned}
&i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}p^\rho q^\sigma\frac{l_{\{\alpha}n_{\beta\}}}{l\cdot n}X^{\alpha\beta\mu\nu}(p,t,k,t)= \\
&=\frac{8}{t^4(l\cdot n)}C'_A\{(q\cdot k)\left[(p\cdot l)X_+(n,t,p)+(p\cdot n)X_+(l,t,p)-(l\cdot n)X_+(p,t,p)\right]+ \\
&\qquad-(p\cdot k)\left[(p\cdot l)X_+(n,t,q)+(p\cdot n)X_+(l,t,q)-(l\cdot n)X_+(p,t,q)\right]\}.
\end{aligned}
\tag{44}
$$

Po zcałkowaniu (39) (korzystając z (8) i (9)) mamy:

$$
\begin{aligned}
&\int dy g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}X^{\alpha\beta\mu\nu}(p,t,k,t)= \\
&=4C'_S\left(\frac{q^2M_V^2 2p_0|\vec{l}|}{\left[M_V^2+2p_0(|\vec{l}|-l_0)\right][M_V^2-2p_0l_0]}-W^2\log\left|1+\frac{2p_0|\vec{l}|}{M_V^2-2p_0l_0}\right|\right)
\end{aligned}
\tag{45}
$$

Po zcałkowaniu (42) (korzystając z (9), (13), (14) oraz (15)) mamy:

$$
\begin{aligned}
&\int dy g_{\mu\nu}\frac{l_{\{\alpha}n_{\beta\}}}{l\cdot n}X^{\alpha\beta\mu\nu}(p,t,k,t)= \\
&=-4C'_S\left\{\left[\frac{2p_0}{n_0}((n\cdot q)-(n\cdot p))+\frac{2p_0}{n_0}\frac{(2q^2-W^2)(n\cdot p)-M_V^2(n\cdot q)}{M_V^2-4p_0l_0}\right]\log\left|1+\frac{|\vec{l}|}{l_0}\right|+\right. \\
&\qquad\left.+\left[(W^2-q^2)+\frac{2p_0}{n_0}\frac{(2q^2-W^2)(n\cdot p)-M_V^2(n\cdot q)}{M_V^2-4p_0l_0}\right]\log\left|1+\frac{2p_0|\vec{l}|}{M_V^2-2p_0l_0}\right|\right\}
\end{aligned}
\tag{46}
$$

4.2 Diagram z energią własną

$p_\mu p_\nu X_Z^{\rho\mu\nu}(W,p)=0$, więc (25) zwężone z $p_\mu p_\nu$ znika i ten diagram nie daje wkładu do funkcji $\frac{p_\mu p_\nu}{p\cdot q}W^{Y\mu\nu}(p,q)$. Z tożsamości (38) mamy dla (26):

$$
g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}X^{\mu\nu\alpha\beta}(p,W,k,W)=\frac{8}{W^4}C'_SX_-(k,W,p)=\frac{4C'_S}{W^2}\left(\frac{q^2M_V^2}{W^2}-y\right)
\tag{47}
$$

$$
i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}p^\rho q^\sigma g_{\alpha\beta}X^{\mu\nu\alpha\beta}(p,W,k,W)=-\frac{8}{W^4}C'_A(q\cdot p)X_+(k,W,p),
\tag{48}
$$

dla (28):

$$
\begin{aligned}
& g_{\mu\nu}\frac{l_{\{\alpha}n_{\beta\}}}{l\cdot n}X^{\mu\nu\alpha\beta}(p,W,k,W) = \\
& = -\frac{8}{W^4(l\cdot n)}C'_S\left[(k\cdot l)X_-(n,W,p)+(k\cdot n)X_-(l,W,p)-(l\cdot n)X_-(k,W,p)\right] = \\
& = -\frac{4C'_S}{W^2}\left\{-(W^2-q^2)+(W\cdot n)\frac{y}{y'}+\left[(W^2-2q^2)(W\cdot n)+(W^2-M_V^2)(q\cdot n)\right]\frac{1}{y'}\right\}
\end{aligned} \tag{49}
$$

$$
\begin{aligned}
& i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}p^\rho q^\sigma\frac{l_{\{\alpha}n_{\beta\}}}{l\cdot n}X^{\mu\nu\alpha\beta}(p,W,k,W) = \\
& = \frac{8}{W^4(l\cdot n)}C'_A(q\cdot p)\left[(k\cdot l)X_+(n,W,p)+(k\cdot n)X_+(l,W,p)-(l\cdot n)X_+(k,W,p)\right].
\end{aligned} \tag{50}
$$

Po zcałkowaniu (47) (korzystając z (10) i (11)) mamy:

$$
\int dy g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}X^{\mu\nu\alpha\beta}(p,W,k,W) = \frac{8C'_Sp_0|\vec{l}|}{W^2}\left\{\frac{q^2M_V^2}{W^2}-\left[M_V^2+p_0(|\vec{l}|-2l_0)\right]\right\} \tag{51}
$$

4.3 Diagramy z poprawką wierzchołkową

$p_\mu p_\nu D_V^{\mu\alpha\nu\beta}(p,W,k,t)=0$, więc te diagramy również nie dają wkładu do $\frac{p_\mu p_\nu}{p\cdot q}W^{Y\mu\nu}(p,q)$.

Dla (30) mamy:

$$
\begin{aligned}
g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}X^{\mu\beta\alpha\nu}(p,W,k,t) &= -\frac{16}{t^2W^2}C'_S(p\cdot k)(W\cdot t) = \\
&= \frac{4C'_S(q^2+M_V^2)}{W^2}\left[1+(W^2-q^2-M_V^2)\frac{1}{y}\right]
\end{aligned} \tag{52}
$$

$$
i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}p^\rho q^\sigma g_{\alpha\beta}X^{\mu\beta\alpha\nu}(p,W,k,t) = \frac{8}{t^2W^2}C'_A(p\cdot k)\left\{2(p\cdot q)(k\cdot q)-q^2(p\cdot t)\right\}. \tag{53}
$$

Dla (32) mamy:

$$
\begin{aligned}
& g_{\mu\nu}\frac{l_{\{\alpha}n_{\beta\}}}{l\cdot n}X^{\mu\beta\alpha\nu}(p,W,k,t) = \\
& = -\frac{2C'_S}{W^2}\left\{(W^2-q^2)-(W\cdot n)\frac{y}{y'}+\left[2q^2(W\cdot n)+(M_V^2-3W^2)(q\cdot n)\right]\frac{1}{y'}+\right. \\
& \qquad \left.-W^2(W^2-q^2)\frac{1}{y}-W^2\left[(2q^2-W^2)(p\cdot n)-M_V^2(q\cdot n)\right]\frac{1}{yy'}\right\} \\
& + i\frac{4C'_A}{t^2W^2(l\cdot n)}\epsilon^{\rho\sigma\delta\lambda}p_\rho k_\sigma l_\delta n_\lambda\left[(k\cdot l)+(p\cdot l)\right].
\end{aligned} \tag{54}
$$

Dodanie (42), (49) i podwojonej części rzeczywistej (54) daje zero, co potwierdza wynikającą z symetrii cechowania własność (2).

$$
\begin{aligned}
& i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}p^\rho q^\sigma\frac{l_{\{\alpha}n_{\beta\}}}{l\cdot n}X^{\mu\beta\alpha\nu}(p,W,k,t) = -\frac{2}{t^2W^2(l\cdot n)}\times \\
& \times\left[C'_Si\epsilon^{\lambda\nu\rho\sigma}k_\nu p_\rho q_\sigma\left\{n_\lambda\left[2(l\cdot k)(p\cdot q)-q^2(l\cdot p)\right]+l_\lambda\left[2(n\cdot k)(p\cdot q)-q^2(n\cdot p)\right]\right\}+\right. \\
& \quad + C'_A\left\{4(k\cdot l)(k\cdot n)(p\cdot q)^2+2(p\cdot l)(p\cdot n)(k\cdot q)q^2+\right. \\
& \qquad -\left[(p\cdot l)(t\cdot n)+(t\cdot l)(p\cdot n)\right]X_-(p,q,k)+ \\
& \qquad +\left[(p\cdot l)(k\cdot n)+(k\cdot l)(p\cdot n)\right]q^2(p\cdot t) \\
& \qquad +2(p\cdot k)(p\cdot q)\left[(q\cdot l)(t\cdot n)+(t\cdot l)(q\cdot n)\right]+ \\
& \qquad \left.\left.-2(l\cdot n)\left[(p\cdot q)^2(k\cdot q)+q^2(p\cdot k)(p\cdot t)\right]\right\}\right].
\end{aligned} \tag{55}
$$

Po zcałkowaniu (52) (korzystając z (9) i (10)) mamy:

$$\int dy g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} X^{\mu\beta\alpha\nu}(p, W, k, t) = \\ = \frac{4C_S'(q^2 + M_V^2)}{W^2} \left\{ 2p_0|\vec{l}| + (W^2 - q^2 - M_V^2) \log \left| 1 + \frac{2p_0|\vec{l}|}{M_V^2 - 2p_0 l_0} \right| \right\} \tag{56}$$

5 Cechowanie axialne masywnego bozonu wektorowego

Ustalmy następujące cechowanie: $\mathcal{F} = n_\mu W^{-\mu} = 0$. Mamy wtedy:

$$-\frac{1}{2} W^+_{\mu\nu} W^{-\mu\nu} - |\mathcal{F}|^2 + M^2 W^+_\mu W^{-\mu} = W^+_\mu \left[-g^{\mu\nu} (\overleftarrow{\partial_\rho} \overrightarrow{\partial^\rho} - M^2) + \overleftarrow{\partial^\mu} \overrightarrow{\partial^\nu} - n^\mu n^\nu \right] W^-_\nu + \mathcal{O}(W^3), \tag{57}$$

więc propagator wygląda następująco:

$$\frac{i}{k^2 - M^2} \left[-g_{\mu\nu} + \frac{(k \cdot n)(k_\mu n_\nu + n_\mu k_\nu) - (k^2 - M^2 + n^2) k_\mu k_\nu - M^2 n_\mu n_\nu}{(k \cdot n)^2 - M^2(k^2 - M^2 + n^2)} \right] \tag{58}$$

Dla $n^2 = 0$, dla bozonu na powłoce masy ($k^2 = M^2$) licznik propagatora to:

$$P_{\mu\nu} = \left[-g_{\mu\nu} + \frac{(k \cdot n)(k_\mu n_\nu + n_\mu k_\nu) - M^2 n_\mu n_\nu}{(k \cdot n)^2} \right] \tag{59}$$

6 Cechowanie axialne masywnego bozonu wektorowego

Ustalmy następujące cechowanie: $\mathcal{F} = (\partial_\mu + n_\mu) W^{-\mu} = 0$. Mamy wtedy:

$$-\frac{1}{2} W^+_{\mu\nu} W^{-\mu\nu} - |\mathcal{F}|^2 + M^2 W^+_\mu W^{-\mu} = W^+_\mu \left[-g^{\mu\nu} (\overleftarrow{\partial_\rho} \overrightarrow{\partial^\rho} - M^2) - (\overleftarrow{\partial^\mu} n^\nu + n^\mu \overrightarrow{\partial^\nu}) - n^\mu n^\nu \right] W^-_\nu + \mathcal{O}(W^3), \tag{60}$$

więc propagator wygląda następująco:

$$\frac{i}{k^2 - M^2} \left[-g_{\mu\nu} + \frac{(k^2 + k \cdot n - M^2)(k_\mu n_\nu + n_\mu k_\nu) - M^2 n_\mu n_\nu - n^2 k_\mu k_\nu}{(k^2 + k \cdot n - M^2)^2 - M^2 n^2} \right] \tag{61}$$

Dla $n^2 = 0$, dla bozonu na powłoce masy ($k^2 = M^2$) licznik propagatora to:

$$P_{\mu\nu} = \left[-g_{\mu\nu} + \frac{(k \cdot n)(k_\mu n_\nu + n_\mu k_\nu) - M^2 n_\mu n_\nu}{(k \cdot n)^2} \right] \tag{62}$$

7 Funkcje struktury wyrażone przez x

7.1 Ladder diagram

Axialna część Ladder diagramu (46) wyrażona przez $x = \frac{-q^2}{2(p\cdot q)}$ to:

$$\begin{aligned}\int dy g_{\mu\nu} \frac{l_{\{\alpha}n_{\beta\}}}{l\cdot n} X^{\alpha\beta\mu\nu}(p,t,k,t) = \\ = -4C_S'q^2 \left\{ \left[-\frac{x+1}{x(x-1)} + \frac{\frac{1+x}{x} + \frac{M_V^2}{q^2}x}{x-1+\frac{M_V^2}{q^2}x^2} \right] \log \left| \frac{2}{1+\frac{M^2}{q^2}\left|\frac{x}{x-1}\right|} \right| + \right. \\ \left. + \frac{1}{x}\left[\frac{2}{x-1+\frac{M_V^2}{q^2}x^2} \right] \log \left| \frac{2M_V^2 x}{M_V^2(2x-3)+q^2\frac{x-1}{x}} \right| \right\}\end{aligned} \tag{63}$$

7.2 Diagram z energią własną

Feynmanowska część diagramu z energią własną (51) wyrażona przez x to:

$$\int dy g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} X^{\mu\nu\alpha\beta}(p,W,k,W) = \frac{C_S'q^2}{2}\frac{x}{x-1}\left(\frac{1}{x} - \frac{M_V^2}{q^2}\frac{1}{x-1}\right)^2 \tag{64}$$

nie ma w niej żadnych rozbieżności przy $M_V \to 0$.

7.3 Diagramy z poprawką wierzchołkową

Feynmanowska część diagramu z poprawką wierzchołkową(56) wyrażona przez x to:

$$\begin{aligned}&\int dy g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} X^{\mu\beta\alpha\nu}(p,W,k,t) = \\ &= 4C_S'\frac{q^2+M_V^2}{x-1}\left\{ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{M_V^2}{q^2}\frac{x}{x-1}\right) - \left(1+\frac{M_V^2}{q^2}x\right)\log\left|\frac{2M_V^2 x}{M_V^2(2x-3)+q^2\frac{x-1}{x}}\right| \right\}\end{aligned} \tag{65}$$

8 Rozbieżności

Logarytm: $\log\left|\frac{2M_V^2 x}{M_V^2(2x-3)+q^2\frac{x-1}{x}}\right|$ przy $M_V \to 0$ daje:

$$\log\left|\frac{2M_V^2 x}{M_V^2(2x-3)+q^2\frac{x-1}{x}}\right| \approx \log\left|\frac{M_V^2}{q^2}\right| + \log\left|\frac{x^2}{x-1}\right| + \ldots \tag{66}$$