

1 Wektory polaryzacji poza powłoką masy

Weźmy bozon wektorowy o czteropędzie $k = (k^0, \vec{k})$ (na lub poza powłoką masy). Zdefiniujmy trzy trój wektory: $\vec{e}_i(k) : i = 1, 2, 3$ takie, że:

$$\vec{e}_i(k) \cdot \vec{e}_j(k) = \delta_{ij} \text{ dla: } i, j = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Jeśli $\vec{k} \neq \vec{0}$ bierzemy $\vec{e}_3(k) := \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$, a $\vec{e}_1(k)$ i $\vec{e}_2(k)$ możemy wybrać dowolnie byle spełniały (1).

Dla $\vec{k} = \vec{0}$ możemy wybrać dowolne trzy wektory spełniające (1).

Jeśli $k^2 \neq 0$ możemy zdefiniować cztery wektory polaryzacji:

$$\begin{aligned} \epsilon_0(k) &:= \frac{k}{\sqrt{k^2}}, \\ \epsilon_1(k) &:= (0, \vec{e}_1(k)), \\ \epsilon_2(k) &:= (0, \vec{e}_2(k)), \\ \epsilon_3(k) &:= \frac{1}{\sqrt{k^2}}(|\vec{k}|, k^0 \vec{e}_3(k)), \end{aligned} \quad (2)$$

(dla $k^2 < 0$ jako $\sqrt{k^2}$ wybieramy dowolny z pierwiastków zespolonych pamiętając, aby zawsze wybierać ten sam). Wektory polaryzacji spełniają warunki:

$$\epsilon_\alpha(k) \cdot \epsilon_\beta(k) = g_{\alpha\beta}, \quad (3)$$

$$g^{\alpha\beta} \epsilon_\alpha^\mu(k) \epsilon_\beta^\nu(k) = g^{\mu\nu}, \quad (4)$$

$$-\xi \frac{k^2 - m^2}{k^2 - \xi m^2} \epsilon_0^\mu(k) \epsilon_0^\nu(k) + \delta^{ij} \epsilon_i^\mu(k) \epsilon_j^\nu(k) = -g^{\mu\nu} + \frac{1 - \xi}{k^2 - \xi m^2} k^\mu k^\nu =: P^{\mu\nu}(k, \xi, m), \quad (5)$$

dla: $\alpha, \beta, \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$; oraz: $i, j = 1, 2, 3$.

gdzie: ξ to parametr ustalający cechowanie, $m \geq 0$ jest masą bozonu, $g_{\mu\nu}$ i $g^{\mu\nu}$ to macierz $diag(1, -1, -1, -1)$, a zdefiniowane powyżej $P^{\mu\nu}(k, \xi, m)$ to licznik propagatora bozonu wektorowego w dowolnym cechowaniu R_ξ .

Warto zauważyć, że wyrażenia (2) nie definiują „prawdziwych” czterowektorów (poza $\epsilon_0(k)$), gdyż nie transformują się one poprawnie względem wszystkich przekształceń Lorentza. Równość $\epsilon_i(\Lambda k) = \Lambda \epsilon_i(k)$ jest prawdziwa tylko dla Λ będących obrotami i boostami w kierunku $\vec{k}$, nie jest natomiast prawdziwa dla boostów w pozostałych kierunkach.

Pomimo to warunki (3) - (5) są prawdziwe dla wszystkich czteropędów k (dla których $k^2 \neq 0$), w tym dla każdego czteropędu otrzymanego z k dowolną transformacją Lorentza: Λk . Tak więc (3) i (4) są niezmiennicze względem wszystkich przekształceń Lorentza:

$$\begin{aligned} \epsilon_\alpha(\Lambda k) \cdot \epsilon_\beta(\Lambda k) &= g_{\alpha\beta}, \\ g^{\alpha\beta} \epsilon_\alpha^\mu(\Lambda k) \epsilon_\beta^\nu(\Lambda k) &= g^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Podobnie warunek (5) jest współzmienniczy względem wszystkich przekształceń Lorentza:

$$-\xi \frac{k^2 - m^2}{k^2 - \xi m^2} \epsilon_0^\mu(\Lambda k) \epsilon_0^\nu(\Lambda k) + \delta^{ij} \epsilon_i^\mu(\Lambda k) \epsilon_j^\nu(\Lambda k) = -g^{\mu\nu} + \frac{1 - \xi}{k^2 - \xi m^2} \Lambda^\mu_\rho k^\rho \Lambda^\nu_\sigma k^\sigma.$$

Możemy uprościć warunek (5) kosztem równości (3) i (4) zmieniając normalizację wektora „zerowego”:

$$\epsilon_0(k, \xi, m) := \sqrt{\frac{-\xi(k^2 - m^2)}{k^2(k^2 - \xi m^2)}} k \quad (6)$$

dodajmy dla spójnej notacji: $\epsilon_i(k, \xi, m) := \epsilon_i(k)$ dla: $i = 1, 2, 3$.

Równość (5) możemy teraz zapisać jako:

$$\delta^{\alpha\beta} \epsilon_\alpha^\mu(k, \xi, m) \epsilon_\beta^\nu(k, \xi, m) = P^{\mu\nu}(k, \xi, m). \quad (7)$$

1.1 Stany własne skrętności

Możemy wprowadzić zespolone kombinacje liniowe wektorów ϵ_1 i ϵ_2 :

$$\epsilon_{\pm} := \frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon_1 \pm i\epsilon_2). \quad (8)$$

Wektory ϵ_0 , ϵ_+ , ϵ_- i ϵ_3 są wektorami własnymi operatora skrętności o wartościach własnych odpowiednio: 0, 1, -1 i 0.

Dla bozonów poza powłoką masy k^2 może być ujemne i czynnik normalizujący wektory $\epsilon_0(k)$ i $\epsilon_3(k)$ może być urojony, podobnie dla wektora $\epsilon_0(k, \xi, m)$, więc tworząc warunki odpowiadające (3), (4) i (7) nie możemy sprząć tych wektorów zespolenie. Dlatego zdefiniujemy:

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_{\alpha} &:= \epsilon_{\alpha}, \text{ dla: } \alpha = 0, 1, 2, 3; \\ \bar{\epsilon}_{\pm} &:= \epsilon_{\pm}^* = \epsilon_{\mp}. \end{aligned} \quad (9)$$

Z tak zdefiniowanymi wektorami możemy napisać równości prawdziwe zarówno dla $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$ jak i dla $\alpha, \beta = 0, +, -, 3$:

$$\epsilon_{\alpha}(k) \cdot \bar{\epsilon}_{\beta}(k) = g_{\alpha\beta}, \quad (10)$$

$$g^{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha}^{\mu}(k) \bar{\epsilon}_{\beta}^{\nu}(k) = g^{\mu\nu}, \quad (11)$$

$$\delta^{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha}^{\mu}(k, \xi, m) \bar{\epsilon}_{\beta}^{\nu}(k, \xi, m) = P^{\mu\nu}(k, \xi, m), \quad (12)$$

gdzie w macierzach: $\alpha, \beta = 0, +, -, 3$ należy traktować jak indeksy numerujące kolejne wiersze i kolumny.

1.2 Funkcje Greena

Używając zdefiniowanych przez (6), (8) i (9) wektorów polaryzacji możemy wprowadzić funkcje Greena z zewnętrzną nóżką zakończoną dowolnie spolaryzowanym bozonem wektorowym poza powłoką masy. Weźmy kanonicznie zdefiniowaną funkcję Greena z zewnętrzną nóżką bozonu wektorowego poza powłoką masy i tak jak zrobilibyśmy wprowadzając nóżkę na powłokę masy, zamieńmy propagator na jeden z wektorów polaryzacji zdefiniowanych w (6) lub (8):

$$G_{\mu}(k, \xi, m, \dots) \frac{iP^{\mu\nu}(k, \xi, m)}{k^2 - m^2} \rightarrow G_{\mu}(k, \xi, m, \dots) \epsilon_{\alpha}^{\mu}(k, \xi, m) =: A_{\alpha}(k, \xi, m, \dots). \quad (13)$$

Z funkcji $A_{\alpha}(k, \xi, m, \dots)$ możemy otrzymać funkcję Greena z nóżką na powłoce masy wybierając k takie, że $k^2 = m^2$, możemy też „skleić” ją z inną funkcją tego typu i pomnożyć przez skalarny czynnik propagacyjny $\frac{i}{k^2 - m^2}$ dostaniemy wtedy wkład do diagramu biorący się z wymiany bozonu o konkretnej polaryzacji numerowanej przez α , poza powłoką masy: $A_{\alpha}(k, \xi, m, \dots) \frac{i}{k^2 - m^2} A'_{\alpha}(k, \xi, m, \dots) = G_{\mu}(k, \xi, m, \dots) \frac{i\epsilon_{\alpha}^{\mu}(k, \xi, m) \bar{\epsilon}_{\alpha}^{\nu}(k, \xi, m)}{k^2 - m^2} G'_{\nu}(k, \xi, m, \dots)$. Sumując wymiany wszystkich polaryzacji dzięki własności (12) dostaniemy ściśle wyrażenie na konkretny diagram:

$$\begin{aligned} A_{\alpha}(k, \xi, m, \dots) \frac{i\delta^{\alpha\beta}}{k^2 - m^2} A'_{\beta}(k, \xi, m, \dots) &= \\ = G_{\mu}(k, \xi, m, \dots) \frac{i\delta^{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha}^{\mu}(k, \xi, m) \bar{\epsilon}_{\beta}^{\nu}(k, \xi, m)}{k^2 - m^2} G'_{\nu}(k, \xi, m, \dots) &= \\ = G_{\mu}(k, \xi, m, \dots) \frac{iP^{\mu\nu}(k, \xi, m)}{k^2 - m^2} G'_{\nu}(k, \xi, m, \dots). \end{aligned} \quad (14)$$

2 Spinory poza powłoką masy

Podobnie jak wektory polaryzacji bozonów, spinory również można uogólnić na fermiony poza powłoką masy. Weźmy standardowo zdefiniowane spinory Diraca $u_s(k)$ i $v_s(k)$ gdzie $s = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$ to skłębności, a $k = (k^0, \vec{k})$ to czteropęd (normalnie byłby na powłoce masy, ale teraz nie narzucamy takiego warunku). W równościach, które chcemy, żeby spełniały spinory występuje sprzężenie zespolone, a pewne składniki spinorów, które on shell są rzeczywiste mogą poza powłoką masy zmienić się w urojone i ich sprzężenie może popsuć te równości. Dlatego, aby spinory i spinory barowane spełniły standardowe warunki, musimy lekko zmienić definicje tych drugich. Niech:

$$u_s(k) = \begin{bmatrix} A(k)\varphi_s(k) \\ B(k)\varphi_s(k) \end{bmatrix} ; v_s(k) = \begin{bmatrix} A'(k)\varphi_s(k) \\ B'(k)\varphi_s(k) \end{bmatrix}$$

gdzie: $A(k), A'(k), B(k), B'(k) \in L(\mathbb{C}^2)$, $\varphi_s(k) \in \mathbb{C}^2$, $\varphi_s^\dagger(k)\varphi_{s'}(k) = \delta_{ss'}$, $\delta^{ss'}\varphi_s(k)\varphi_{s'}^\dagger(k) = 1_{2 \times 2}$. Zdefiniujmy barowane spinory jako:

$$\bar{u}_s(k) := [\varphi_s^\dagger(k)A(k), \varphi_s^\dagger(k)B(k)] \gamma^0 ; \bar{v}_s(k) := [\varphi_s^\dagger(k)A'(k), \varphi_s^\dagger(k)B'(k)] \gamma^0. \quad (15)$$

Możemy wybrać macierze $A(k), \dots, B'(k)$ tak aby:

$$\bar{u}_s(k)u_{s'}(k) = 2\sqrt{k^2}\delta_{ss'} ; \bar{v}_s(k)v_{s'}(k) = -2\sqrt{k^2}\delta_{ss'}. \quad (16)$$

Wówczas macierze $A(k), \dots, B'(k)$ dla k na powłoce masy stają się hermitowskie więc definicje (15) dla k on shell odtwarzają te standardowe, dla dowolnych k prawdziwe są również następujące równości:

$$\begin{aligned} \delta^{ss'}u_s^\alpha(k)\bar{u}_{s'}^\beta(k) &= (\not{k} + \sqrt{k^2})^{\alpha\beta}, \\ \delta^{ss'}v_s^\alpha(k)\bar{v}_{s'}^\beta(k) &= (\not{k} - \sqrt{k^2})^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (17)$$

Dodając powyższe równania z odpowiednimi współczynnikami możemy otrzymać licznik propagatora:

$$\begin{aligned} \delta^{ss'} \left[\frac{\sqrt{k^2} + m}{2\sqrt{k^2}} u_s^\alpha(k) \bar{u}_{s'}^\beta(k) + \frac{\sqrt{k^2} - m}{2\sqrt{k^2}} v_s^\alpha(k) \bar{v}_{s'}^\beta(k) \right] &= \\ = \left(\frac{1}{2} + \frac{m}{2\sqrt{k^2}} \right) (\not{k} + \sqrt{k^2})^{\alpha\beta} + \left(\frac{1}{2} - \frac{m}{2\sqrt{k^2}} \right) (\not{k} - \sqrt{k^2})^{\alpha\beta} &= \\ = (\not{k} + m)^{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (18)$$

gdzie m to masa fermionu.

2.1 Funkcje Greena

Podobnie jak dla bozonów mamy dla wychodzącej linii fermionowej:

$$\begin{aligned} \frac{i(\not{k} + m)^{\beta\alpha}}{k^2 - m^2} G_\alpha(k, m, \dots) &\rightarrow \bar{u}_s^\alpha(k) G_\alpha(k, m, \dots) =: A_s^{\bar{u}}(k, m, \dots) \\ &\rightarrow -\bar{v}_s^\alpha(k) G_\alpha(k, m, \dots) =: A_s^{\bar{v}}(k, m, \dots). \end{aligned} \quad (19)$$

dla wchodzącej linii fermionowej:

$$\begin{aligned} G_\alpha(k, m, \dots) \frac{i(\not{k} + m)^{\alpha\beta}}{k^2 - m^2} &\rightarrow G_\alpha(k, m, \dots) u_s^\alpha(k) =: A_s^u(k, m, \dots) \\ &\rightarrow G_\alpha(k, m, \dots) v_s^\alpha(k) =: A_s^v(k, m, \dots). \end{aligned} \quad (20)$$

Sklejanie w przypadku fermionów wygląda następująco:

$$\begin{aligned}
& i\delta^{ss'} \left[\frac{A_s^u(k, m, \dots) A_{s'}'^{\bar{u}}(k, m, \dots)}{2\sqrt{k^2}(\sqrt{k^2} - m)} - \frac{A_s^v(k, m, \dots) A_{s'}'^{\bar{v}}(k, m, \dots)}{2\sqrt{k^2}(\sqrt{k^2} + m)} \right] = \\
& = G_\alpha(k, m, \dots) i\delta^{ss'} \frac{\frac{\sqrt{k^2+m}}{2\sqrt{k^2}} u_s^\alpha(k) \bar{u}_{s'}^\beta(k) + \frac{\sqrt{k^2-m}}{2\sqrt{k^2}} v_s^\alpha(k) \bar{v}_{s'}^\beta(k)}{k^2 - m^2} G'_\beta(k, m, \dots) = \\
& = G_\alpha(k, m, \dots) \frac{i(\not{k} + m)^{\alpha\beta}}{k^2 - m^2} G'_\beta(k, m, \dots).
\end{aligned} \tag{21}$$

3 Stosunki „sklejanych” amplitud

Jeśli interesuje nas stosunek amplitud procesów z różnie spolaryzowanymi bozonami wektorowymi w stanie końcowym i amplitudy te można „posklejać” z bardziej elementarnych funkcji Greena: $\mathcal{M}_\alpha = \sum_x A_x^n \frac{i}{k^2 - m^2} A_{x\alpha}^m + \dots$ to stosunek tych amplitud można wyrazić przez stosunki elementarnych funkcji: $({}^n R_{x'}) := \frac{A_x^n}{A_{x'}^n}$ w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{M}_\alpha}{\mathcal{M}_\beta} &= \frac{\sum_x A_x^n \frac{i}{k^2 - m^2} A_{x\alpha}^m + \dots}{\sum_{x'} A_{x'}^n \frac{i}{k^2 - m^2} A_{x'\beta}^m + \dots} = \sum_x \frac{A_x^n \frac{i}{k^2 - m^2} A_{x\alpha}^m}{\sum_{x'} A_{x'}^n \frac{i}{k^2 - m^2} A_{x'\beta}^m + \dots} + \dots \\
&= \sum_x \frac{1}{\sum_{x'} \frac{A_{x'}^n \frac{i}{k^2 - m^2} A_{x'\beta}^m}{A_x^n \frac{i}{k^2 - m^2} A_{x\alpha}^m} + \dots} + \dots = \sum_x \frac{1}{\sum_{x'} ({}^n R_{x'}) ({}^m R_{x'\beta}^\alpha) + \dots} + \dots
\end{aligned} \tag{22}$$

4 Funkcja qqW

Rozważmy funkcję Greena kwark-kwark-W poza powłoką masy z nóżkami zakończonymi spinorami i wektorami polaryzacji o określonych skrętnościach, zdefiniowanymi w poprzednich sekcjach. Oznaczmy kwark z wchodzącej linii fermionowej przez q_1 , a z wychodzącej przez q_2 .

Zacznijmy od nadania cząstkom q_1, q_2, W dowolnych czteropędów odpowiednio k_1, k_2, k_W (na lub poza powłoką masy), gdzie $k_i = (k_i^0, \vec{k}_i) : i = 1, 2, W$. Dla ustalenia uwagi niech k_1 będzie wchodzący, a k_2, k_W wychodzące (nie zakładamy znaku k_i^0 , więc nie tracimy ogólności).

Operator skrętności komutuje ze wszystkimi generatorami obrotów oraz z generatorem boostu wzdłuż trójpędu cząstki, dlatego wektory polaryzacji i spinory transformują się poprawnie (pozostają wektorami własnymi skrętności z taką samą wartością własną) względem tych nieskończonych przekształceń. Dla nieinfinityezymalnych transformacji: obroty mogą być dowolnie duże, natomiast boost musi być na tyle mały, że nie zmienia zwrotu trójpędu. Ponieważ jednak cząstki mogą mieć trójpędy w różnych kierunkach boost dobry dla (wzdłuż pędu) jednej cząstki nie musi być dobry dla pozostałych, więc spośród transformacji Lorentza symetriami rozważanej funkcji Greena są tylko obroty. Mamy trzy dowolne czteropędy czyli 12 parametrów, 3-parametrową symetrię obrotów i 4-składnikową zasadę zachowania czteropędu, więc zostanie nam: $12 - 3 - 4 = 5$ niezależnych parametrów.

Obróćmy nasz układ odniesienia tak by $\vec{k}_W$ wskazywał kierunek i zwrot osi z , następnie obróćmy układ, wokół osi z , tak by $\vec{k}_2$ leżał w płaszczyźnie xz i miał zwrot zgodny z osią x ($\vec{k}_2 \cdot \vec{e}_x \geq 0$). Pozbyliśmy się w ten sposób 3 parametrów (k_W^x, k_W^y, k_2^y) wyczerpaliśmy więc symetrię obrotów.

Sparametryzujemy trójpędy następująco:

$$\vec{k}_1 = |\vec{k}_1| \begin{bmatrix} \sin \theta_1 \cos \varphi \\ \sin \theta_1 \sin \varphi \\ \cos \theta_1 \end{bmatrix}; \vec{k}_2 = |\vec{k}_2| \begin{bmatrix} \sin \theta_2 \\ 0 \\ \cos \theta_2 \end{bmatrix}; \vec{k}_W = |\vec{k}_W| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

gdzie: $|\vec{k}_i| \in \mathbb{R}_+$; $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi]$; $\varphi \in [0, 2\pi[$. Przy wybranych zwrotach czteropędów zasada zachowania to: $k_1 = k_2 + k_w$. By wyeliminować parametr φ skorzystamy z zasady zachowania y -owej współrzędnej: $|\vec{k}_1| \sin \theta_1 \sin \varphi = 0$, więc $\varphi \in \{0, \pi\}$. Korzystając częściowo z zachowania x -owej współrzędnej pędu: $|\vec{k}_1| \sin \theta_1 \cos \varphi = |\vec{k}_2| \sin \theta_2$ i z faktu, że $|\vec{k}_1| \sin \theta_1, |\vec{k}_2| \sin \theta_2 \geq 0$ otrzymujemy: $\cos \varphi \geq 0$ czyli ostatecznie: $\varphi = 0$.

Mamy więc kinetykę sparametryzowaną 8 liczbami, częściowo od siebie zależnymi, gdyż zostało nam do wykorzystania jeszcze, zachowanie trzech składowych czteropędu (współrzedną x -ową wykorzystaliśmy tylko do ustalenia znaku).

$$k_1 = \begin{bmatrix} k_1^0 \\ |\vec{k}_1| \sin \theta_1 \\ 0 \\ |\vec{k}_1| \cos \theta_1 \end{bmatrix}; k_2 = \begin{bmatrix} k_2^0 \\ |\vec{k}_2| \sin \theta_2 \\ 0 \\ |\vec{k}_2| \cos \theta_2 \end{bmatrix}; k_W = \begin{bmatrix} k_W^0 \\ 0 \\ 0 \\ |\vec{k}_W| \end{bmatrix}; \quad (23)$$

gdzie: $k_i^0 \in \mathbb{R}$; $|\vec{k}_i| \in \mathbb{R}_+$; $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi]$.

W tej parametryzacji rozpatrywana funkcja Greena wygląda następująco:

$$A_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_W}^{\bar{u}_1 u_2}(k_i^0, |\vec{k}_i|, \theta_j) = C \sqrt{k_1^0 - \lambda_1 |\vec{k}_1|} \sqrt{k_2^0 - \lambda_2 |\vec{k}_2|} \cdot \begin{cases} \frac{(1+\lambda_W)\lambda_1 \sqrt{1-\lambda_1 \cos \theta_1} \sqrt{1+\lambda_2 \cos \theta_2} + (1-\lambda_W)\lambda_2 \sqrt{1+\lambda_1 \cos \theta_1} \sqrt{1-\lambda_2 \cos \theta_2}}{\sqrt{2}} & : \text{W poprzeczne} \\ \frac{(k_W^0 + |\vec{k}_W|) \sqrt{1+\lambda_1 \cos \theta_1} \sqrt{1+\lambda_2 \cos \theta_2} \pm \lambda_1 \lambda_2 (k_W^0 - |\vec{k}_W|) \sqrt{1-\lambda_1 \cos \theta_1} \sqrt{1-\lambda_2 \cos \theta_2}}{\mu_W} & : \text{W skalarne/podłużne} \end{cases} \quad (24)$$

gdzie: C - pewna stała; $\mu_W = \sqrt{(k_W^0)^2 - \vec{k}_W^2}$; λ_j - podwojona skrętność kwarku j ; λ_W - skrętność W ; $i = 1, 2, W$; $j = 1, 2$.

4.1 Kwarki on shell

Amplitudę, w których bozon W poza powłoką masy jest emitowany z lini kwarkowej, a kwarki kończące te linie są na powłoce masy, można zapisać jako:

$$\mathcal{M}_{\lambda_1, \lambda_2}(k_j^0, |\vec{k}_j|, \theta_j, \dots) = \sum_{\lambda_W} A_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_W}^{\bar{u}_1 u_2}(k_i^0, |\vec{k}_i|, \theta_j) G_{\lambda_W}(k_W^0, |\vec{k}_W|, \dots) + \dots \quad (25)$$

gdzie: $\lambda_W = \pm 1, 0_L, 0_S$; $i = 1, 2, W$; $j = 1, 2$. Jeśli nie rozróżniamy początkowych, ani końcowych skrętności kwarków to przekrój czynny (odpowiednio uśredniony i wysumowany po tychże skrętnościach) wygląda następująco:

$$\begin{aligned} \sigma(k_j^0, |\vec{k}_j|, \theta_j, \dots) &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \left| \mathcal{M}_{\lambda_1, \lambda_2}(k_j^0, |\vec{k}_j|, \theta_j, \dots) \right|^2 = \\ &= \sum_{\lambda_W, \lambda'_W} P_{\lambda_W, \lambda'_W}^{\bar{u}_1 u_2}(k_i^0, |\vec{k}_i|, \theta_j) G_{\lambda_W}(k_W^0, |\vec{k}_W|, \dots) G_{\lambda'_W}^*(k_W^0, |\vec{k}_W|, \dots) + \dots \end{aligned} \quad (26)$$

gdzie funkcja $P_{\lambda_W, \lambda'_W}^{\bar{u}_1 u_2}(k_i^0, |\vec{k}_i|, \theta_j)$ zdefiniowana jest jako:

$$P_{\lambda_W, \lambda'_W}^{\bar{u}_1 u_2}(k_i^0, |\vec{k}_i|, \theta_j) := \frac{1}{2} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} A_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_W}^{\bar{u}_1 u_2}(k_i^0, |\vec{k}_i|, \theta_j) A_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda'_W}^{\bar{u}_1 u_2*}(k_i^0, |\vec{k}_i|, \theta_j). \quad (27)$$

Wstawiając do powyższego funkcję $A_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_W}^{\bar{u}_1 u_2}(k_i^0, |\vec{k}_i|, \theta_j)$ z (24) dostaniemy dla W poprzecznych:

$$\begin{aligned} P_{\lambda_W, \lambda_W}^{\bar{u}_1 u_2}(k_i^0, |\vec{k}_i|, \theta_j) &= |C|^2 (k_1^0 + \lambda_W |\vec{k}_1| \cos \theta_1) (k_2^0 - \lambda_W |\vec{k}_2| \cos \theta_2), \\ P_{\lambda_W, -\lambda_W}^{\bar{u}_1 u_2}(k_i^0, |\vec{k}_i|, \theta_j) &= |C|^2 |\vec{k}_1| |\vec{k}_2| \sin \theta_1 \sin \theta_2, \end{aligned} \quad (28)$$

dla W skalarnych i podłużnych:

$$P_{S,S/L,L}^{\bar{u}_1 u_2}(k_i^0, |\vec{k}_i|, \theta_j) = \frac{|C|^2}{|\mu_W|^2} \left[\left((k_W^0)^2 + \vec{k}_W^2 \right) (k_1^0 k_2^0 + |\vec{k}_1| |\vec{k}_2| \cos \theta_1 \cos \theta_2) \right. \\ \left. - 2k_W^0 |\vec{k}_W| (k_1^0 |\vec{k}_2| \cos \theta_2 + k_2^0 |\vec{k}_1| \cos \theta_1) + \right. \\ \left. \pm \mu_W^2 |\vec{k}_1| |\vec{k}_2| \sin \theta_1 \sin \theta_2 \right], \quad (29)$$

$$P_{S,L/L,S}^{\bar{u}_1 u_2}(k_i^0, |\vec{k}_i|, \theta_j) = \frac{|C|^2}{|\mu_W|^2} \left[2k_W^0 |\vec{k}_W| (k_1^0 k_2^0 + |\vec{k}_1| |\vec{k}_2| \cos \theta_1 \cos \theta_2) \right. \\ \left. - \left((k_W^0)^2 + \vec{k}_W^2 \right) (k_1^0 |\vec{k}_2| \cos \theta_2 + k_2^0 |\vec{k}_1| \cos \theta_1) \right],$$

dla interferencji skalarnych i podłużnych z poprzecznymi:

$$P_{S/L,+1}^{\bar{u}_1 u_2}(k_i^0, |\vec{k}_i|, \theta_j) = \frac{|C|^2 \sqrt{2}}{\mu_W} \left[(|\vec{k}_W| + k_W^0) (|\vec{k}_2| \cos \theta_2 - k_2^0) |\vec{k}_1| \sin \theta_1 + \right. \\ \left. \pm (|\vec{k}_W| - k_W^0) (|\vec{k}_1| \cos \theta_1 + k_1^0) |\vec{k}_2| \sin \theta_2 \right], \quad (30)$$

$$P_{S/L,-1}^{\bar{u}_1 u_2}(k_i^0, |\vec{k}_i|, \theta_j) = \frac{|C|^2 \sqrt{2}}{\mu_W} \left[(|\vec{k}_W| + k_W^0) (|\vec{k}_1| \cos \theta_1 - k_1^0) |\vec{k}_2| \sin \theta_2 + \right. \\ \left. \pm (|\vec{k}_W| - k_W^0) (|\vec{k}_2| \cos \theta_2 + k_2^0) |\vec{k}_1| \sin \theta_1 \right].$$

Tylko polaryzację skalarną opisuje „prawdziwy” czterowektor dlatego tylko funkcję $P_{SS}^{\bar{u}_1 u_2}$ można wyrazić przez Lorentzowskie niezmienniki:

$$P_{S,S}^{\bar{u}_1 u_2}(k_i^0, |\vec{k}_i|, \theta_j) = \frac{|C|^2}{2|\mu_W|^2} \left[(m_1^2 - m_2^2)^2 - \mu_W^2 (m_1^2 + m_2^2) \right]. \quad (31)$$

gdzie: $m_j = \sqrt{(k_j^0)^2 - \vec{k}_j^2}$ - masa j -tego kwarku; $j = 1, 2$; $\mu_W = \sqrt{(k_W^0)^2 - \vec{k}_W^2}$.

4.1.1 Kwarki bezmasowe

Po podstawieniu zer za masy kwarków wzory znacznie się upraszczają. Znikają wszystkie funkcje produkcji polaryzacji skalarnej ($P_{S,S}^{\bar{u}_1 u_2}$, $P_{S,L/L,S}^{\bar{u}_1 u_2}$, $P_{S,\pm 1}^{\bar{u}_1 u_2}$), a pozostałe wyglądają następująco:

$$P_{\lambda_W, \lambda_W}^{\bar{u}_1 u_2}(k_i^0, |\vec{k}_i|, \theta_j) = -\frac{|C|^2 \mu_W^2}{4\vec{k}_W^2} (\mu_W^2 + 4k_1^0 k_2^0 + 2\vec{k}_W^2 + 2\lambda_W |\vec{k}_W| (k_1^0 + k_2^0)),$$

$$P_{\lambda_W, -\lambda_W}^{\bar{u}_1 u_2}(k_i^0, |\vec{k}_i|, \theta_j) = \frac{|C|^2 |\mu_W|^2}{4\vec{k}_W^2} (\mu_W^2 + 4k_1^0 k_2^0), \quad (32)$$

$$P_{L,L}^{\bar{u}_1 u_2}(k_i^0, |\vec{k}_i|, \theta_j) = \frac{|C|^2 |\mu_W|^2}{4\vec{k}_W^2} (\mu_W^2 + 4k_1^0 k_2^0) (1 - \text{sgn}(\mu_W^2)),$$

$$P_{L, \lambda_W}^{\bar{u}_1 u_2}(k_i^0, |\vec{k}_i|, \theta_j) = i \frac{|C|^2 \mu_W^2}{\sqrt{2} \vec{k}_W^2} \sqrt{\mu_W^2 + 4k_1^0 k_2^0} (k_1^0 + k_2^0 + \lambda_W |\vec{k}_W|).$$

5 Poniżej uwagi JR:

Wyprowadzenie p. Jakuba wydaje mi się eleganckie i chyba będzie użyteczne. Ja mam parę uwag co do tego jak to wykorzystać. Wzór 22 wydaje się bardzo skomplikowany, ale chyba nie jest tak źle. Idea jest taka że przy użyciu tego formalizmu powyżej rozbijamy amplitudy na iloczyn amplitudy procesu produkcji W i potem jakiejs formy jego rozpraszania, używając off-shell W w stanie pośrednim. Zgodnie ze wzorem 22 amplituda stanu końcowego to

$$M_Y = \sum_X A_X B_{XY} \quad (33)$$

gdzie Y to polaryzacja końcowego W a sumujemy po polaryzacjach stanów pośrednich X . Policzenie stosunku takich amplitud dla różnych Y wydaje się skomplikowane (suma dzielona przez sumę) ale z naszych wcześniejszych rachunków wynika że W_L rozprasza się niemal wyłącznie do W_L , a W_T do W_T . Więc “amplitude końcowego procesu rozpraszania” B_{XY} można przybliżyć przez $B_X \delta_{XY}$. W sumie (33) zostaje więc jeden dominujący człon:

$$M_Y = \sum_X A_X B_{XY} \approx A_Y B_Y \quad (34)$$

Jak chcemy wzmacniać zawartość jednej polaryzacji w stosunku np. M_L/M_T , musimy po-manipulować stosunkiem A_L/A_T , bo na rozpraszanie końcowe już nie mamy wielkiego wpływu. A A_X to te funkcje Green’a off-shell o których pisze p. Jakub wyżej. Jego zadanie to teraz porobić wykresy A_L/A_T w funkcji różnych parametrów, przede wszystkim (i kątów?) wirtualności początkowych i końcowych fermionów. Lista argumentów od czego taka off-shell funkcja Greena zależy może być dość długa, więc proponowałem żeby ją ograniczyć - np. tylko fermion wchodzący on-shell a wychodzący off-shell lub odwrotnie, albo oba on-shell a sprawdzić zależność od ich mas itp. W każdym razie, ustalamy większość parametrów i manipulujemy 1-2 najbardziej interesującymi.

Mam nadzieję że p. Jakub porobi stosowne rysunki do następnego czwartku. P. Jakubie, zgadza się pan z moimi komentarzami, jakieś ekstra uwagi? Ja bym tylko prosił o pliki latex w formacie 12pt, do 10pt mam za słaby wzrok.