Fizyka I (Mechanika)
Zadania na ćwiczenia - seria I

Zadanie 1. Przeanalizuj definicję układu współrzędnych prostokątnych

- **Wersor osi $\mathcal{O}x$**: wektor o długości jednostkowej, skierowany w kierunku dodatnim osi $\mathcal{O}x$.
- Na płaszczyźnie możemy wybrać dwa wzajemnie prostopadłe wersory definiujące osie $\mathcal{O}x$ i $\mathcal{O}y$. Jak wybrać kierunek trzeciego wersora? Odpowiedź: korzystamy *wyłącznie* z prawoskrętnego układu współrzędnych.
  Jest to układ, w którym wersor osi $\mathcal{O}z$ ma kierunek ruchu śruby *prawoskrętnej*, zaczepionej do wersorów $\vec{e}_x$ i $\vec{e}_y$, gdy wersorem $\vec{e}_x$ kręcimy w kierunku $\vec{e}_y$ przez kąt $\pi/2$.
- Dlaczego prawoskrętny? Jest to wyłącznie sprawa umowy, związana z orientacją przestrzeni R^3 i *definicją iloczynu wektorowego* $\Rightarrow$ patrz wykład z *Analizy matematycznej.*

Zadanie 2. Współrzędne i składowe wektorów.

- Współrzędne punktu na osiach układu $\mathcal{O}xyz$ określamy przez rzut prostokątny punktu na osie $\mathcal{O}x$, $\mathcal{O}y$, $\mathcal{O}z$.
- **Współrzędną wektora** na danej osi nazywamy **liczbę**, która jest równa różnicy współrzędnych końca i początku wektora na tej osi.
- **Składową wektora** $\vec{A}$ wzdłuż danej osi nazywamy **wektor**, który jest rzutem prostopadłym wektora $\vec{A}$ na tę oś.

Przykład: dany jest wektor o współrzędnych $[x, y, z] = (2, 3, 4)$. Narysuj ten wektor i wyraź go przez sumę jego składowych.

Zadanie 3. Przedstaw graficznie następujące prawa związane z rachunkiem wektorowym.

$$\begin{aligned}
\vec{A}+\vec{B} &= \vec{B}+\vec{A} - \text{przemienność dodawania} \\
\vec{A}+\vec{0} &= \vec{A} - \text{istnieje wektor zerowy} \\
\vec{A}+\vec{A}' &= \vec{0} - \text{dla każdego wektora istnieje wektor przeciwny,} \vec{A}' = -\vec{A} \\
\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C}) &= (\vec{A}+\vec{B})+\vec{C} - \text{łączność dodawania} \\
a(\vec{A}+\vec{B}) &= a\vec{A}+a\vec{B} - \text{rozdzielczość dodawania względem mnożenia}
\end{aligned}$$

Przypomnienie: definicje iloczynu skalarnego i wektorowego.

$$\begin{aligned}
\vec{A}\cdot\vec{B} &= AB\cos(\vec{A},\vec{B}) - \text{iloczyn skalarny - liczba} \\
\vec{A}\times\vec{B} &= AB\sin(\vec{A},\vec{B})\vec{e} - \text{iloczyn wektorowy - wektor}
\end{aligned}$$

Zadanie 4. Przeanalizuj następujące właściwości iloczynu skalarnego wektorów.

Cosinus kąta między wektorami $\vec{A}$ i $\vec{B}$ jest równy iloczynowi skalarnemu wersorów w kierunku $\vec{A}$ i $\vec{B}$:

$$\cos(\vec{A},\vec{B}) = \vec{e}_A\cdot\vec{e}_B$$

Iloczyn skalarny wersorów wzajemnie prostopadłych:

$$\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x = \vec{e}_y\cdot\vec{e}_y = \vec{e}_z\cdot\vec{e}_z = 1;$$
$$\vec{e}_x\cdot\vec{e}_y = \vec{e}_x\cdot\vec{e}_z = \vec{e}_y\cdot\vec{e}_z = 0.$$
$$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = \delta_{ij}.$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad i=j \\ 0 & \text{gdy} \quad i\neq j \end{cases}$$

Jeśli $\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z$ oraz $\vec{B} = B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z$, to:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = \sum_{i=x,y,z} A_iB_i = A_iB_j\delta_{ij}$$

Zadanie 5. Dane są dwa wektory: $\vec{A} = [3, 3\sqrt{3}, 0]$ oraz $\vec{B} = [3, \sqrt{3}, 0]$. Oblicz ich iloczyn skalarny korzystając z następujących metod:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i,j=x,y,z} a_ib_j\delta_{ij},$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos\theta,$$

gdzie θ to kąt między wektorami $\vec{A}$ i $\vec{B}$.

Zadanie 6. Korzystając z definicji iloczynu skalarnego, znajdź kąt między wektorami $\vec{A} = (1, 2, 3)$ i $\vec{B} = (2, -1, -2)$.

Zadanie 7. Oblicz, w jakiej odległości od brzegu znajdzie się łódź, która przez pierwsze 30 min porusza się ze stałą prędkością $v_1 = 2$ [m/s] pod kątem $\alpha = 30°$ względem brzegu, a przez następne 60 min porusza się z prędkością $v_2 = 1{,}5$ [m/s] pod kątem $\beta = 60°$ względem brzegu (zakładamy, że brzeg jest linią prostą).

Zadanie 8. Piłce (traktujemy ją jak punkt materialny) znajdującej się tuż przy progu równi o kącie nachylenia θ nadano prędkość v_0, której wektor skierowany był w górę równi pod kątem φ względem jej płaszczyzny. Jak daleko od progu równi upadnie piłka? Dla jakiego kąta φ, przy zadanym kącie θ, zasięg mierzony wzdłuż równi jest maksymalny?

Zadanie 9. Podaj we współrzędnych kartezjańskich i biegunowych równanie toru satelity krążącego na stacjonarnej orbicie kołowej, na wysokości H, nad powierzchnią planety o promieniu R.

Zadanie 10. Linia śrubowa powstaje, gdy na jednostajny ruch z częstością ω po okręgu o promieniu R nałoży się ruch jednostajny z prędkością v w kierunku prostopadłym do płaszczyzny okręgu. Podaj równanie parametryczne linii śrubowej.

Zadanie 11. Punkt A znajduje się na obwodzie koła o promieniu R, które toczy się po osi x w kierunku dodatnim tej osi ze stałą prędkością kątową ω. W chwili początkowej $t = 0$ współrzędne punktu A były równe $(x, y) = (0, 0)$, zaś współrzędne środka okręgu były równe $(x_S, y_S) = (0, R)$. Znaleźć równanie parametryczne toru i równanie toru punktu A. Obliczyć składowe wektora przyspieszenia i jego wartość.

Zadanie 12. Prosta toczy się jednostajnie i bez poślizgu po nieruchomym okręgu o promieniu R, tzn. punkt styczności prostej i okręgu porusza się wokół okręgu ze stałą prędkością kątową ω. Znaleźć parametryczne równanie toru, składowe i wartość prędkości i przyspieszenia dowolnego punktu A leżącego na prostej. Zakładamy, że w chwili początkowej prosta była równoległa do osi y układu współrzędnych o środku pokrywającym się ze środkiem okręgu, a punkt A leżał w odległości d od punktu styczności.

Zadanie 13. W czterech rogach kwadratowego sufitu o boku a znajdują się cztery pająki. W pewnej chwili zaczynają ścigać się nawzajem, tzn. poruszają się wszystkie ze stałą co do wartości prędkością v_0 skierowaną wzdłuż prostej łączącej danego pająka z pająkiem go poprzedzającym. Znaleźć czas, po jakim pająki się spotkają.

Zadanie 14. Przez koniec pręta przechodzi pionowa oś utwierdzona w przymocowanym do stołu łożysku. Pręt obraca się w płaszczyźnie poziomej wokół osi z prędkością kątową ω. Na pręt nanizany jest koralik, który porusza się względem pręta ruchem oscylującym wokół punktu odległego od osi obrotu o a.

Podaj równanie toru koralika w układzie odniesienia stołu, jeżeli okres drgań jest równy okresowi ruchu obrotowego, a ich amplituda jest równa a. Naszkicuj rzut toru koralika na płaszczyznę stołu.

Zadanie 15. Punkt materialny porusza się w płaszczyźnie xy po okręgu o promieniu R z prędkością $v(t) = at$. Obliczyć przyspieszenie punktu w układzie biegunowym. W chwili $t = 0$ punkt spoczywał w $(x, y) = (R, 0)$; środek okręgu znajduje się w początku układu współrzędnych.

Zadanie 16. Punkt materialny porusza się po torze, którego równanie parameteryczne dane jest przez:

$$\varrho = \varrho_0(1 - ct), \varphi = \frac{ct}{1 - ct},$$

gdzie r_0 i c są stałymi. Znaleźć równanie toru punktu, składową radialną i transwersalną prędkości i przyspieszenia.

Zadanie 17. Ćma porusza się po krzywej, której długość s dana jest wzorem $s = s_0 \exp(ct)$, gdzie s_0 i c są stałymi. Wiedząc, że wektor przyspieszenia $\vec{a}$ tworzy stały kąt φ ze styczną do toru w każdym punktcie, znaleźć wartość prędkości i przyspieszenia stycznego i normalnego.

Zadanie 18. Kolista tarcza o promieniu R wiruje wokół swojej osi ze stałą prędkością kątową ω. Ze środka tarczy wyrusza biedronka i porusza się wzdłuż wybranego promienia ze stałą prędkością v_0. Znaleźć:
a) parametryczne równanie toru oraz równanie toru biedronki w nieruchomym układzie odniesienia we współrzędnych kartezjańskich i biegunowych; środek tego układu pokrywa się ze środkiem tarczy.
b) zależność od czasu wartości wektora prędkości oraz jego składowych: radialnej i transwersalnej;
c) zależność od czasu wartości wektora przyspieszenia, jak również jego składowych: radialnej i transwersalnej.