Fizyka I (mechanika) 1100 - 1AF14
Fizyka I 1100 - 1B01

Wykład 3

Jerzy Łusakowski

21.10.2019

Plan wykładu

Masa i siła - druga zasada dynamiki

Więzy i trzecia zasada dynamiki Newtona

Siła tarcia

Druga zasada dynamiki - doświadczenia

- Wózki na torze powietrznym: cząstki i akceleratory.

Wprowadzenie pojęcia siły i masy

Wiemy już, że w układzie inercjalnym
ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się bez przyspieszenia,
gdy wypadkowa sił działających na ciało jest równa zero.

Chcemy zatem powiązać przyspieszenie
z siłą działającą na ciało.

Zaniedbujemy wpływ, jaki ciało wywiera na "resztę Wszechświata",
tzn. ciało nie zmienia postaci siły na nie działającej.

Wprowadzenie pojęcia siły i masy

- Mamy N cząstek P_0, P_1, ..., P_N
  oraz M akceleratorów A_0, A_1, ..., A_M.
- Za pomocą A_0 nadajemy im przyspieszenia $a_0^{(0)}$ i $a_1^{(0)}$, ..., $a_N^{(0)}$.
  (Dolny indeks numeruje cząstki, a górny - akceleratory.)
  Przyspieszenia mierzymy w układzie inercjalnym.
- Możemy dobrać takie liczby $p_1^{(0)}$, $p_2^{(0)}$, ..., $p_N^{(0)}$,
  że $p_1^{(0)} a_1^{(0)} = p_2^{(0)} a_2^{(0)} = ... = p_N^{(0)} a_N^{(0)} = a_0^{(0)}$.

  Zauważmy, że wybraliśmy cząstkę P_0 jako "wzorcową" i do osiąganego przez nią przyspieszenia dostosowujemy pozostałe za pomcą współczynników $p_i^{(0)}$.

Wprowadzenie pojęcia siły i masy

Zmieniamy akceleratory i powtarzamy procedurę:

$$p_1^{(1)}a_1^{(1)} = p_2^{(1)}a_2^{(1)} = \ldots = p_N^{(1)}a_N^{(1)} = a_0^{(1)};$$
$$p_1^{(2)}a_1^{(2)} = p_2^{(2)}a_2^{(2)} = \ldots = p_N^{(2)}a_N^{(2)} = a_0^{(2)};$$
$$\ldots$$
$$p_1^{(M)}a_1^{(M)} = p_2^{(M)}a_2^{(M)} = \ldots = p_N^{(M)}a_N^{(M)} = a_0^{(M)}.$$

WYNIK DOŚWIADCZENIA:

dla danego i (cząstki) liczby $p_i^{(j)}$ nie zależą od j (akceleratora),
czyli dla danej cząstki jej przyspieszenie względem przyspieszenia cząstki “wzorcowej” nie zależy od tego, jakiego akceleratora użyjemy.

Wprowadzenie pojęcia siły i masy

Np., dla cząstki o numerze 1:

$$p_1^0 = p_1^1 = ... = p_1^M$$

Skoro tak, to możemy pominąć górny indeks i napisać:

$$p_1^0 = p_1^1 = ... = p_1^M = m_1.$$

Liczbę m_1 nazywamy masą bezwładną cząstki P_1.

I analogicznie dla pozostałych cząstek.

Cząstka wzorcowa ma masę jednostkową: $m_0 = 1$.
Od nas zależy, co będzie tą jednostką: kg, g, oz, lb, ...

Wprowadzenie pojęcia siły i masy

Zauważmy, z kolei, że w ciągu równości

$$m_1 a_1^{(0)} = m_2 a_2^{(0)} = \ldots = m_N a_N^{(0)} = m_0 a_0^{(0)};$$
$$m_1 a_1^{(1)} = m_2 a_2^{(1)} = \ldots = m_N a_N^{(1)} = m_0 a_0^{(1)};$$
$$m_1 a_1^{(2)} = m_2 a_2^{(2)} = \ldots = m_N a_N^{(2)} = m_0 a_0^{(2)};$$
$$\ldots$$
$$m_1 a_1^{(M)} = m_2 a_2^{(M)} = \ldots = m_N a_N^{(M)} = m_0 a_0^{(M)}.$$

iloczyny $m_i a_i^{(j)}$ nie zależą od cząstki, ale od akceleratora.

Iloczyn ten jest *siłą* wywieraną przez akcelerator na cząstkę.

Możemy przyjąć, że akcelerator A_0 definiuje *jednostkową siłę* $m_0 a_0^{(0)}$.

Masa i siła - doświadczenie

Naszym akceleratorem jest ciężarek, a cząstką - wózek na torze powietrznym. Za pomocą układu ultradźwiękowego mierzymy przyspieszenie wózka poruszającego się pod wpływem ciągnącego go ciężarka. Pomiary wykonujemy dla wózka obiążonego trzema różnymi ciężarami oraz dla trzech różnych wartości ciężarków ciągnących wózek. Poniższa tabela zawiera wartości zmierzonego (obliczonego) przyspieszenia w jednostkach m/s^2. Jak można wywnioskować, wózek "referencyjny" jest najlżejszy, a ciężarek "referencyjny" - też najlżejszy.

Wózek / Akcelerator	0	1	2
0	0.6 (0.62)	1.1 (1.17)	1.6 (1.66)
1	0.4 (0.38)	0.7 (0.73)	1.0 (1.06)
2	0.2 (0.27)	0.5 (0.53)	0.75 (0.78)

Masa i siła - doświadczenie

Teraz znajdujemy współczynniki p odpowiadając na pytanie: przez jaką liczbę trzeba pomnożyć przyspieszenie wózka 1 i 2 aby otrzymać przyspieszenie wózka 0? Tabela tych liczb ma następującą postać:

Wózek / Akcelerator	0	1	2
0	1	1	1
1	1.5 (1.6)	1.6 (1.6)	1.6 (1.6)
2	3 (2.3)	2.2 (2.2)	2.1 (2.1)

Widać, że liczby w każdym wierszu są (w przybliżeniu) takie same, tzn. nie zależą od akceleratora - są właściwością cząstki. Te liczby utożsamiamy z masą bezwładną wyznaczoną w ten sposób, że jednostką masy jest masa wózka o numerze 0.

Masa i siła - doświadczenie

A teraz pytamy, przez jaką liczbę trzeba pomnożyć przyspieszenia dla akceleratora 0, aby otrzymać przyspieszenia dla akceleratorów 1 i 2 - wyniki są zamieszczone w poniższej tabeli:

Wózek / Akcelerator	0	1	2
0	1	1.8 (1.9)	2.7 (2.7)
1	1	1.8 (1.9)	2.7 (2.8)
2	1	2.5 (1.9)	3.8 (2.8)

Widać, że liczby w ostatnim wierszy znacznie odbiegają od wartości teoretycznej, co jest spowodowane bardzo niedokładnym pomiarem przyspeszenia dla akceleratora 0 i wózka 2. Pozostałe wartości zupełnie nieźle zgadzają się z oczekiwanymi.

Uwaga do przeprowadzonego doświadczenia

Idea doświadczenia polega na stosowaniu obiektów niezależnych od siebie: akceleratorów i cząstek. W naszym doświadczeniu *akcelerator także się porusza*, tzn. ciężarek o masie m porusza układ o masie $m + M$. W związku z tym, mierzone przyspieszenie wynosi

$$a = \frac{mg}{m + M}$$

zamiast pożądanego

$$a = \frac{mg}{M}.$$

Popełniany błąd systematyczny pomiaru jest rzędu $\frac{m}{M}$ i wynosi w naszym doświadczeniu ok. 5%.

Druga zasada dynamiki Newtona

W układzie inercjalnym, ciało o masie m, na które działa wypadkowa siła $\vec{F}$ porusza się z przyspieszeniem $\vec{a}$ takim, że:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Stopnie swobody

Cząstka odosobniona może poruszać się w dowolnym kierunku w przestrzeni - mówimy, że jest to *ruch o trzech stopniach swobody*, gdyż potrzebujemy trzech współrzędnych do określenia położenia cząstki.

Zazwyczaj skracamy to określenie i mówimy w takim przypadku, że *cząstka ma trzy stopnie swobody*.

Stopnie swobody cząstki punktowej

Jeśli cząstka porusza się po płaszczyźnie opisanej równaniem $f(x, y, z) = 0$ (np., krążek hokejowy po płycie lodowiska opisanej równaniem $z = 0$), to współrzędne wektora jej położenia $\vec{r_c} = (x_c, y_c, z_c)$ muszą spełniać równanie tej płaszczyzny: $z_c = 0$.
Podobnie, gdyby cząstka poruszała się po płaszczyźnie wzdłuż osi x, to dodatkowo $y_c = 0$
Mówimy, że w tych przypadkach cząstka ma, odpowiednio, 2 i 1 stopień swobody.

Stopnie swobody bryły sztywnej

Sytuacja się komplikuje, gdy mamy bryłę sztywną, np. prostopadłościan. Bryła sztywna może obracać się wokół dowolnie położonej osi obrotu, zatem do opisu jej położenia potrzebujemy sześciu liczb - trzy opisują położenie środka jej masy (lub innego wybranego punktu bryły) a trzy - położenie przestrzenne jakiejś osi sztywno związanej z bryłą. Tak więc, bryła sztywna poruszająca się swobodnie ma 6 stopni swobody. Ograniczenie ruchu powoduje zmniejszenie liczby stopni swobody. Na przykład, sztywne zamocowanie osi obrotu przchodzącej przez środek masy zmniejsza liczbę stopni swobody do jednego: środek masy się nie porusza, zaś położenie bryły wyznaczone jest tylko przez jeden kąt obrotu wokół ustalonej osi.

Więzy

Przyczynę ograniczającą ruch nazywamy *więzami*.
Mówimy o płaszczyźnie albo krzywej więzów, w zależności od tego, po czym porusza się cząstka.

Obecność więzów oznacza istnienie sił działających na cząstkę wynikających z oddziaływania cząstki z układem ograniczającym ruch.
Są to *siły reakcji więzów*.

Równania więzów

Dla przykładu, jeśli cząstka porusza się po powierzchni sfery o promieniu R, to jej współrzędne muszą spełniać równanie:

$$R^2 = x_c^2 + y_c^2 + z_c^2,$$

a w przypadku ruchu po paraboli leżącej w płaszczyźnie x, y o równaniu $y = x^2$, muszą być spełnione równania:

$$y_c = x_c^2,$$

$$z_c = 0.$$

Są to dodatkowe warunki, które muszą być uwzględnione podczas rozwiązywania równań ruchu.

Liczba stopni swobody

Na podstawie przedstawionych rozważań wnioskujemy, że *liczba stopni swobody w ruchu z więzami jest równa liczbie stopni swobody w przypadku ruchu swobodnego, pomniejszonej o liczbę równań definiujących więzy.*

Zauważmy, że więzy mogą zależeć od czasu. Na przykład, jeśli wahadło matematyczne zrobione jest z kulki zawieszonej na gumce, to odległość kulki od punktu zawieszenia będzie zależeć od czasu. Albo, gdy rozpatrzymy kulę toczącą się po gumowej membranie - ruch kuli zmienia równanie powierzchni, po której kula się porusza.

Siła reakcji więzów

Siła reakcji więzów jest prostopadła do powierzchni (albo krzywej) więzów.

Przykłady: siła reakcji równi prostopadła do jej powierzchni, siła reakcji więzów w ruchu po okręgu.

Więzy - podsumowanie

- Ruch poruszających się obiektów jest często ograniczony do płaszczyzny (w ogólności - powierzchni) lub krzywej.
- Mówimy wtedy, że mamy do czynienia z ruchem z więzami.
- Więzy są źródłem siły reakcji, która jest prostopadała do płaszczyzny (lub krzywej) więzów.
- Ruch z więzami charakteryzuje się mniejszą niż trzy liczbą stopni swobody:
  - Ruch swobodny: 3 stopnie swobody;
  - Ruch na płaszczyźnie: 2 stopnie swobody;
  - Ruch wzdłuż krzywej: 1 stopień swobody;
- Liczba stopni swobody = 3 - (liczba równań opisujących więzy).

Trzecia zasada dynamiki - doświadczenia

- Stalowy pręt w uchwycie i magnes sztabkowy.
- Dwa magnesy: jeden na wadze elektronicznej, drugi wiszący na dynamometrze cyfrowym.
- Dwa jednakowe magnesy wiszące na prętach.
- Dwa wózki na torze powietrznym ze sprężyna pomiędzy nimi, ściągnięte nicią, która przepalamy.
- Prawo Archimedesa: ciało zawieszone na dynamometrze + naczynie z wodą + waga.

Trzecia zasada dynamiki Newtona

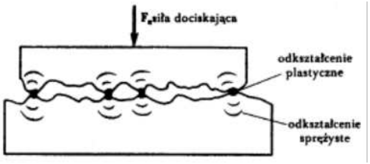
W układzie inercjalnym, jeśli ciało A działa na ciało B siłą $\vec{F}_{A\to B}$, to ciało B działa na ciało A siłą $\vec{F}_{B\to A}$ o tej samej wartości lecz przeciwnie skierowanej:

$$\vec{F}_{A\to B} = - \vec{F}_{B\to A}.$$

Zauważmy, że zasada ta może obowiązywać tylko w przypadku, gdy oddziaływania rozchodzą się w sposób natychmiastowy. Jest zatem zasadą słuszną w ramach fizyki nierelatywistycznej.

UWAGA: Pisząc $\vec{F}_{A\to B} = - \vec{F}_{B\to A}$ mamy na myśli, że siła $\vec{F}_{A\to B}$ przyłożona jest do ciała B, a siła $\vec{F}_{B\to A}$ - do ciała A!

Tarcie poślizgowe



- Powierzchnia styku jest dużo mniejsza niż powierzchnia geometryczna.
- Mechanizm tarcia: "spawanie na zimno" i rozrywanie.
- Współczynnik tarcia statycznego jest większy niż tarcia poślizgowego.
- Współczynnik tarcia tocznego jest mniejszy niż tarcia poślizgowego.

Właściwości siły tarcia: prawa Amontonsa - Coulomba

- Nauka o tarciu: trybologia.
- Prawa te mają charakter empiryczny. Znał je już Leonardo da Vinci, odkrył ponownie Guillaume Amontons (1699 r.), dokładnie sprawdził Charles Coulomb (1781 r.)
- Pierwsze: siła tarcia T między dwoma ciałami jest wprost proporcjonalna do siły normalnej F_N utrzymującej je w zetknięciu. Współczynnik proporcjonalności μ nazywa się współczynnikiem tarcia:

$$T = \mu F_N$$

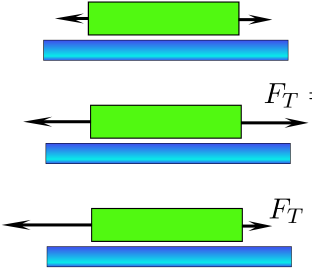
W zapisie wektorowym:

$$\vec{T} = -\mu F_N \vec{e}_v.$$

- Drugie: przy danej sile normalnej, siła tarcia nie zależy od powierzchni zetknięcia ciał.
- Trzecie: dla niezbyt dużych prędkości, współczynnik tarcia kinetycznego nie zależy od prędkości (nie mówimy tu o sile lepkości, która z definicji zależy od prędkości).

Tarcie statyczne i kinetyczne

F_{zew}



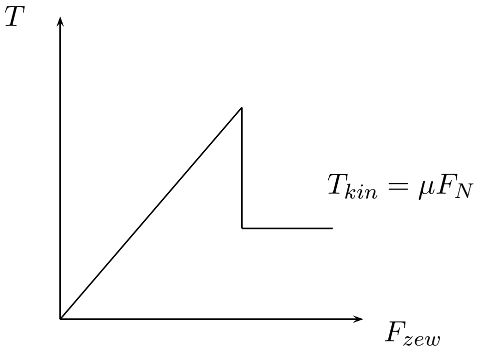
$F_T < T_{stat,max}$; stan spoczynku

$F_T = T_{stat,max}$; stan spoczynku

$F_T = T_{kin}$; ruch przyspieszony

Tarcie statyczne i kinetyczne

$$T_{kin} = \mu F_N$$

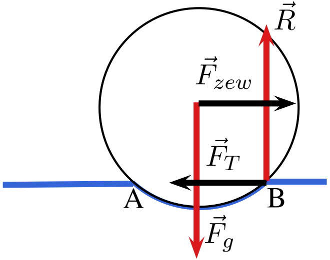


Attocube

Różnica między współczynnikiem tarcia statycznego a kinetycznego wykorzystana jest w działaniu precyzyjnych przesuwów wytwarzanych przez attocube systems AG (https://www.attocube.com/en).

Dokładność przesuwu - poniżej nm.

Tarcie toczne



Siła tarcia $\vec{F}_T$ jest równa co do wartości sile ciągnącej $\vec{F}_{zew}$, a siła reakcji $\vec{R}$ - sile ciężkości $\vec{F}_g$. Pod wpływem działania siły $\vec{F}_{zew}$ nacisk w punkcie A maleje, a w punkcie B - rośnie.

Punkt przyłożenia siły $\vec{R}$ przesuwa się w prawo aż do osiągnięcia granicznej wartości μ_t, dla której moment siły $\vec{F}_{zew}$ osiąga wartość momentu siły $\vec{F}_g$:

$$F_{zew}h \approx F_{zew}r = F_g\mu_t.$$

Toczenie rozpoczyna się, gdy $F_{zew} > F_g\mu_t/r$. Wielkość μ_t/r jest analogiem współczynnika tarcia posuwistego i jest od niego dużo mniejsza.

Siła tarcia a równania ruchu

Jeśli ciało porusza się, to siła tarcia jest równa swojej maksymalnej wartości $T = \mu F_N$. W takim przypadku znaną siłę tarcia możemy wstawić do równań ruchu.

Jeśli ciało nie porusza się, to siła tarcia równoważy wypadkową "sił ciągnących" i jest nie większa niż maksymalna wartość: $T < \mu F_N$. W takim przypadku, siłę tarcia możemy wyznaczyć z równań ruchu. Siła tarcia jest w tym przypadku *siłą reakcji więzów*.

Siła tarcia

Doświadczenie mówi, że: siła oporu ruchu jest skierowana przeciwnie do wektora prędkości i, w ogólności, zależy od prędkości:

$$\vec{T} = -\vec{e}_v T(\vec{v}).$$

Równanie ruchu w przypadku obecności tarcia:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{T}$$

$$m\vec{a} = \vec{F} - \vec{e}_v T(\vec{v})$$

Będziemy zajmować się dwoma przypadkami:
a) siła tarcia jest niezależna od prędkości: $\vec{T} = -T\vec{e}_v$;
b) siła tarcia jest wprost proporcjonalna do prędkości: $\vec{T} = -\alpha v\vec{e}_v$.

Siła lepkości

- Siła oporu działająca na ciało poruszające się w cieczy lub gazie (ogólnie - w płynie).
- Zależy od wielu czynników, jak: prędkość, gęstość płynu, rozmiary ciała,...
- Będziemy rozpatrywać najprostszy przypadek, gdy siła lepkości jest proporcjonalna do prędkości poruszającego się ciała.