Fizyka I (mechanika) 1100 - 1AF14
Fizyka I 1100 - 1B01

Wykład 4

Jerzy Łusakowski

Plan wykładu

- Siła sprężystości
- Iloczyn wektorowy
- Ruch cząstki naładowanej w polu magnetycznym
- Transformacja $\vec{v}$ i $\vec{a}$ między układem inercjalnym a nieinercjalnym
- Ziemia jako układ nieinercjalny

Prawo Hooke'a

Dany jest pręt o długości L i przekroju ΔS, który rozciągamy siłą ΔF. Pod wpływem *naprężenia*

$$\sigma = \frac{\Delta F}{\Delta S}$$

pręt wydłuża się o ΔL. *Wydłużenie względne* jest równe:

$$\lambda = \frac{\Delta L}{L}.$$

Prawo Hooke'a mówi, że *dla niezbyt dużych odkształceń*

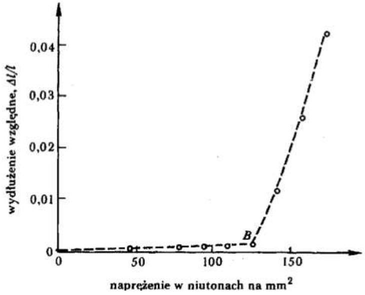
$$\lambda = \alpha\sigma,$$

czyli *wydłużenie względne jest proporcjonalne do naprężenia*.
α - współczynnik wydłużenia. Z powyższego wynika, że

$$\Delta F = \frac{\Delta L \Delta S}{\alpha L} = k\Delta L,$$

gdzie k - współczynnik sprężystości.

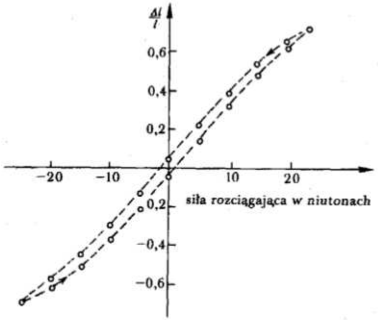
Prawo Hooke'a - granice stosowalności



Zależność wydłużenia względnego od naprężenia dla drutu miedzianego o powierzchni przekroju poprzecznego $S = 0.126$ mm^2. Zakres stosowalności prowa Hooke'a kończy się w punkcie B.

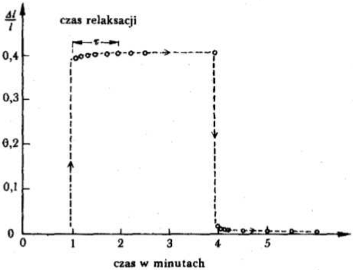
AKW & JAZ "Wstęp do fizyki", tom 1, str. 234, PWN, 1976.

Sprężystość - histereza i relaksacja



Pętla histerezy dla rurki kauczukowej.

AKW & JAZ "Wstęp do fizyki", tom 1, str. 234, PWN, 1976.



Opóźnienie sprężyste przy rozciąganiu rurki kauczukowej, która była poddawana zmiennemu naprężeniu.

AKW & JAZ "Wstęp do fizyki", tom 1, str. 234, PWN, 1976.

Równanie ruchu oscylatora harmonicznego

Oscylator harmoniczny jest układem opisanym funkcją $\Psi(t)$, której ewolucję w czasie określa równanie:

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} + \omega^2\Psi = 0.$$

Rozwiązaniem tego równania jest

$$\Psi(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0),$$

gdzie A jest amplitudą drgań.
Równanie ruchu jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu, więc wyznaczenie funkcji Ψ wymaga dwukrotnego całkowania. Każde całkowanie wprowadza jedną stałą całkowania. Dwie nieznane wielkości A i φ wyznaczamy na podstawie warunków początkowych. Zazwyczaj warunkami tymi są znane wartości funkcji Ψ i jej pochodnej $d\Psi/dt$ w chwili $t = 0$.

Równanie oscylatora harmonicznego

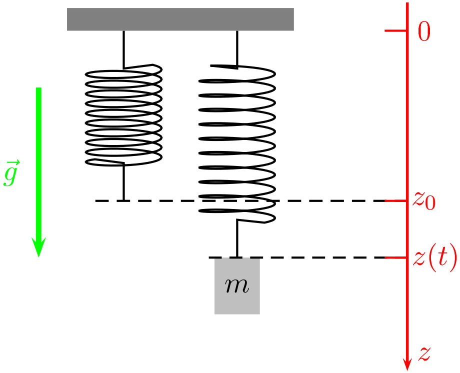
Z równaniem postaci:

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} + \omega^2\Psi = 0$$

będziemy się często spotykać. Równanie to opisuje, m.in.:

- oscylacje wahadła matematycznego, fizycznego, torsyjnego (dla małych wychyleń);
- oscylacje masy na sprężynie;
- ruch cząstki naładowanej w polu magnetycznym;
- oscylacje prądów i napięć w obwodach prądu zmiennego.

Przykład: masa na sprężynie



Równanie ruchu:

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = mg - k(z - z_0).$$

Iloczyn wektorowy

Iloczyn wektorowy wektorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$, $\vec{A} \times \vec{B}$, definiujemy jako wektor $\vec{C}$, który:

- jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$;
- ma zwrot zgodny z ruchem śruby prawoskrętnej, gdy wektorem $\vec{A}$ kręcimy w kierunku wektora $\vec{B}$ przez kąt mniejszy niż π;
- ma długość równą $|\vec{A}||\vec{B}|\sin(\sphericalangle(\vec{A},\vec{B}))$.

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B},$$

$$C = AB\sin(\sphericalangle(\vec{A},\vec{B})).$$

Iloczyn wektorowy wersorów

Zauważmy, że w *prawoskrętnym* układzie współrzędnych prostokątnych, rozpiętym przez wersory $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ i $\vec{e}_z$, zachodzi:

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z,\ \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x,\ \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y,$$

a pozostałe iloczyny wektorowe są równe zero.
Te trzy równania można zapisać w postaci:

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk}\vec{e}_k, \quad (i,j,k) = (x,y,z),$$

gdzie tensor całkowicie antysymetryczny ε_{ijk} zdefiniowany jest przez:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{dla parzystych permutacji (i, j, k);} \\ \text{-1} & \text{dla nieparzystych permutacji (i, j, k);} \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

Iloczyn wektorowy wyrażony przez współrzędne

Dane są dwa wektory $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ oraz $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$, których współrzędne określone są w *prawoskrętnym* układzie współrzędnych. Korzystając z rozdzielczości iloczynu wektorowego względem dodawania wektorów oraz z obliczonych powyżej iloczynów wektorowych wersorów można łatwo obliczyć, że:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{array}{l} \vec{e}_x(A_y B_z - A_z B_y) + \\ \vec{e}_y(-A_x B_z + A_z B_x) + \\ \vec{e}_z(A_x B_y - A_y B_z) \end{array} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Siła Lorentza

Siła działająca na cząstkę o ładunku q, poruszającą się z prędkością $\vec{v}$ w polu magnetycznym o indukcji B:

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Jeśli dodatkowo obecne jest pole elektryczne $\vec{E}$, to całkowita siła działająca na cząstkę jest równa:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Ruch w jednorodnym polu magnetycznym

Zadanie: Znaleźć i przedyskutować ruch cząstki o masie m i ładunku q w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $\vec{B} = [0, 0, B]$. Prędkość początkowa $\vec{v}_0$ skierowana jest pod kątem α do pola magnetycznego. W chwili $t = 0$ cząstka znajdowała się w punkcie o współrzędnych $(0, 0, 0)$.

Ruch w jednorodnym polu magnetycznym

Równanie ruchu ma postać:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B} = \vec{e}_x v_y B - \vec{e}_y v_x B$$

czyli we współrzędnych (x, y, z):

$$\begin{cases} m\frac{dv_x}{dt} & = & qv_yB \\ m\frac{dv_y}{dt} & = & -qv_xB \\ m\frac{dv_z}{dt} & = & 0 \end{cases}$$

Ruch w jednorodnym polu magnetycznym

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} &= \omega_c v_y \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\omega_c v_x \\ v_z &= v_{z0} = \text{const} \\ z(t) &= v_{z0} t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 v_x}{dt^2} &= -\omega_c^2 v_x \\ \frac{d^2 v_y}{dt^2} &= -\omega_c^2 v_y \end{cases}$$

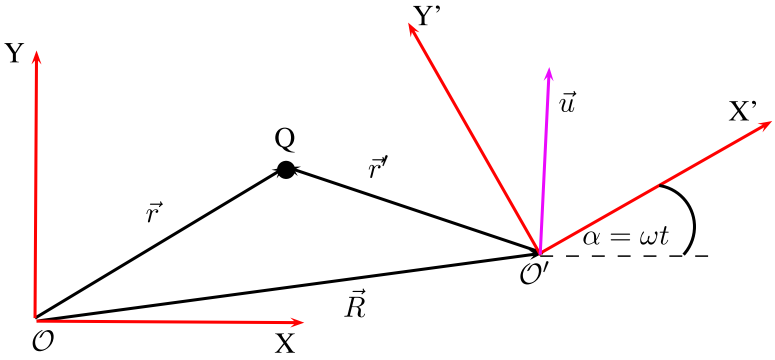
Po rozwiązaniu i uwzględnieniu warunków początkowych:

$$\begin{cases} v_x(t) &= v_0 \sin\alpha \cos\omega_c t \\ v_y(t) &= -v_0 \sin\alpha \sin\omega_c t \end{cases} ; \begin{cases} x(t) &= \frac{v_0 \sin\alpha}{\omega_c} \sin\omega_c t \\ y(t) &= \frac{v_0 \sin\alpha}{\omega_c} (\cos\omega_c t - 1) \end{cases}$$

Ruch w jednorodnym polu magnetycznym - wnioski

- W przypadku, gdy prędkość początkowa ma kierunek pola magnetycznego, cząstka porusza się baz zmiany kierunku i wartości prędkości;
- W ogólnym przypadku ruch jest złożeniem ruchu jednostajnego w kierunku pola magnetycznego (z prędkością $v_0 \cos\alpha$ i ruchu po okręgu w płaszczyźnie prostopadłej do pola. W ogólności zatem tor jest linią śrubową o stałym skoku równym $2\pi m v_0 \sin\alpha / qB$. Ruch po okręgu odbywa się z prędkością $v_0 \sin\alpha$. Promień okręgu wynosi $v_0 \sin\alpha/\omega_c$.
- Siła Lorentza jest prostopadła do prędkości, zatem nie wykonuje pracy i nie zmienia wartości prędkości cząstki, a jedynie jej kierunek.
- Kierunek ruchu okrężnego zależy od znaku ładunku cząstki.

Dwaj obserwatorzy - związek między *mierzonymi* współrzędnymi punktu



Chcemy wyrazić położenie, prędkość i przyspieszenie *mierzone* w układzie $\mathcal{O}$ przez położenie, prędkość i przyspieszenie *mierzone* w układzie $\mathcal{O}'$

Zacznijmy od położenia. Zgodnie z rysunkiem

$$\vec{r} = \vec{r'} + \vec{R}$$

ale zauważmy, że chcemy, aby $\vec{r'}$ był wyznaczony przez współrzędne i wersory układu primowanego:

$$x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = x'\vec{e'}_{x'} + y'\vec{e'}_{y'} + z'\vec{e'}_{z'} + R_x\vec{e}_x + R_y\vec{e}_y + R_z\vec{e}_z.$$

Dla uproszczenia rachunków zakładamy, że ruch względny układów (złożony z obrotu i przesunięcia) jest ograniczony do płaszczyzny xy. Wtedy

$$\vec{e'}_{x'} = \cos\alpha\vec{e}_x + \sin\alpha\vec{e}_y$$
$$\vec{e'}_{y'} = -\sin\alpha\vec{e}_x + \cos\alpha\vec{e}_y$$
$$\vec{e'}_{z'} = \vec{e}_z.$$

Po podstawieniu i prostych przekształceniach otrzymamy:

$$\left\{\begin{array}{lcc} x & = & (x' \cos\alpha - y' \sin\alpha) + R_x \\ y & = & (x' \sin\alpha + y' \cos\alpha) + R_y \\ z & = & z' + R_z \end{array}\right. \tag{1}$$

oraz

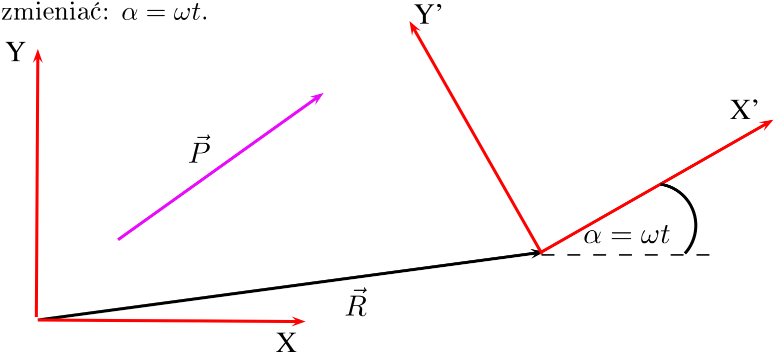
$$\left\{\begin{array}{lcc} x' & = & (x - R_x)\cos\alpha + (y - R_y)\sin\alpha \\ y' & = & -(x - R_x)\cos\alpha + (y - R_y)\sin\alpha \\ z' & = & z - R_z \end{array}\right. \tag{2}$$

Te równania należy rozumieć w następujący sposób: jeśli obserwator $\mathcal{O}$ *mierzy* w układzie odniesienia $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ współrzędne (x, y, z) punktu P, a oberwator $\mathcal{O}'$ *mierzy* w układzie odniesienia $\vec{e'}_x, \vec{e'}_y, \vec{e'}_z$ współrzędne (x', y', z') tego punktu, to równania (1) i (2) dają związki między współrzędnymi. **Podkreślmy: każdy z obserwatorów rzutuje wektor położenia na osie *własnego* układu odniesienia.**

$$x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z - R_x\vec{e}_x - R_y\vec{e}_y - R_z\vec{e}_z = x'\vec{e'}_{x'} + y'\vec{e'}_{y'} + z'\vec{e'}_{z'}$$

Dwaj obserwatorzy - związek między *mierzoną* pochodną wektora

Zajmiemy się teraz znalezieniem relacji pomiędzy pochodną wektora $\vec{P}$ mierzoną przez obserwatorów $\mathcal{O}$ i $\mathcal{O}'$. $\vec{P}$ jest dowolnym wektorem, może symbolizować wektor położenia, prędkości, itp. Zakładamy też, że kąt obrotu między jednego układu względem drugiego może się zmieniać: $\alpha = \omega t$.



W układzie $\mathcal{O}$: $\vec{P} = P_x \vec{e}_x + P_y \vec{e}_y + P_z \vec{e}_z.$

W układzie $\mathcal{O}'$: $\vec{P} = P'_{x'} \vec{e'}_{x'} + P'_{y'} \vec{e'}_{y'} + P'_{z'} \vec{e'}_{z'}.$

Wprowadźmy *oznaczenie* $\vec{P}'$:

$$\vec{P}' = P'_{x'} \vec{e'}_{x'} + P'_{y'} \vec{e'}_{y'} + P' z' \vec{e'}_{z'}.$$

rozumiejąc to w ten sposób, że wektor $\vec{P}'$ jest to wektor $\vec{P}$ wyrażony przez *współrzędne i wersory* układu $\mathcal{O}'$.

$$\vec{P} = P_x\vec{e}_x + P_y\vec{e}_y + P_z\vec{e}_z = P'_{x'}\vec{e'}_{x'} + P'_{y'}\vec{e'}_{y'} + P'_{z'}\vec{e'}_{z'} = \vec{P}'.$$

Podstawiając wersory "primowane" otrzymujemy:

$$\begin{gathered}\vec{P} = P'_{x'}\vec{e'}_{x'} + P'_{y'}\vec{e'}_{y'} + P'_{z'}\vec{e'}_{z'} = \\ = P'_{x'}(\cos\alpha\vec{e}_x + \sin\alpha\vec{e}_y) + P'_{y'}(-\sin\alpha\vec{e}_x + \cos\alpha\vec{e}_y) + P'_{z'}\vec{e}_z = \\ = (P'_{x'}\cos\alpha - P'_{y'}\sin\alpha)\vec{e}_x + (P'_{x'}\sin\alpha + P'_{y'}\cos\alpha)\vec{e}_y + P'_{z'}\vec{e}_z.\end{gathered}$$

Zastanówmy się, co oznacza ta równość w prostym przypadku, gdy wektor $\vec{P}$ jest wektorem stałym w układzie $\mathcal{O}$. Jeśli orientacja układu $\mathcal{O}'$ względem układu $\mathcal{O}$ jest ustalona (tzn. kąt α nie zmienia się w czasie) to współrzędne "primowane" też muszą być stałe w czasie. Inaczej jest, gdy układ "primowany" obraca się względem "nieprimowanego" - widać, że w takiej sytuacji zmiana wartości funkcji $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ musi być skompensowana zmianą wartości współrzędnych primowanych. Inaczej mówiąc, dla obserwatora $\mathcal{O}'$ wektor $\vec{P}$ zmienia się (bo zmieniają się jego współrzędne w układzie primowanym). Zatem, mimo że pochodna wektora $\vec{P}$ w układzie $\mathcal{O}$ jest równa zero, w układzie $\mathcal{O}'$ jest różna od zera. Znajdziemy teraz związek między tymi pochodnymi.

W ogólności, zmieniają się współrzędne wektora $\vec{P}$ w obu układach. Zgodnie z założeniem, że ruch obrotowy zachodzi tylko w płaszczyźnie xy, mamy $\alpha = \omega t$, gdzie wektor prędkości kątowej $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$ jest *mierzony przez obserwatora $\mathcal{O}$*. Różniczkując (i wykorzystując związki między wersorami w obu układach), dostajemy:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{dP_x}{dt}\vec{e}_x + \frac{dP_y}{dt}\vec{e}_y + \frac{dP_z}{dt}\vec{e}_z =$$

$$= \frac{dP'_{x'}}{dt}\vec{e'}_{x'} + \frac{dP'_{y'}}{dt}\vec{e'}_{y'} + \frac{dP'_{z'}}{dt}\vec{e'}_{z'} - \omega P'_{y'}\vec{e'}_{x'} + \omega P'_{x'}\vec{e'}_{y'}.$$

Czyli:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{P}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{P}'.$$

Zastosujmy ten wynik do wektora położenia punktu Q: $\vec{r} = \vec{r'} + \vec{R}$. Wektor $\vec{R}$ jest położeniem $\mathcal{O}$ względem $\mathcal{O}'$, wyrażonym we współrzędnych "nieprimowanych". Aby uzyskać pełną analogię z powyższym rozumowaniem, obliczmy pochodną wektora $\vec{r} - \vec{R} = \vec{r'}$:

$$\frac{d(\vec{r} - \vec{R})}{dt} = \frac{d\vec{r'}}{dt}$$

$$\vec{v} - \vec{u} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r'},$$

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r'},$$

gdzie:
$\vec{v}$ - mierzona przez $\mathcal{O}$ zmiana wektora $\vec{r}$ (wyrażona przez współrzędne i wersory "nieprimowane"), czyli prędkość punktu Q w układzie $\mathcal{O}$;
$\vec{v'}$ - mierzona przez $\mathcal{O}'$ zmiana wektora $\vec{r'}$ (wyrażona przez współrzędne i wersory "primowane"), czyli prędkość punktu Q w układzie $\mathcal{O}'$;
$\vec{u}$ - mierzona przez $\mathcal{O}$ zmiana wektora $\vec{R}$ (wyrażona przez współrzędne i wersory "nieprimowane"), czyli prędkość $\mathcal{O}'$ w układzie $\mathcal{O}$.

Znajdźmy teraz związek między przyspieszeniami:

$$\vec{v} - \vec{u} = \vec{v'} + \vec{\omega} \times \vec{r'}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{v} - \vec{u}) = \frac{d}{dt}(\vec{v'} + \vec{\omega} \times \vec{r'}) + \vec{\omega} \times (\vec{v'} + (\omega \times \vec{r'}))$$

Ostatecznie, otrzymujemy:

$$\vec{a} = \vec{a'} + \vec{a}_{tr} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r'} + 2\vec{\omega} \times \vec{v'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'}),$$

gdzie:
$\vec{a'}$ - przyspieszenie mierzone w $\mathcal{O}'$;
$\vec{a}_{tr} = \frac{d\vec{u}}{dt}$ - przyspieszenie postępowe $\mathcal{O}'$ względem $\mathcal{O}$, mierzone w $\mathcal{O}$;
$2\vec{\omega} \times \vec{v'}$ - przyspieszenie Coriolisa; $\vec{v'}$ - mierzone w $\mathcal{O}'$;
$\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r'}$ - przyspieszenie kątowe $\mathcal{O}'$ względem $\mathcal{O}$;
$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'})$ - przyspieszenie dośrodkowe.
Zauważmy, że $\vec{a}$, $\vec{a}_{tr}$ oraz $\vec{\omega}$ są mierzone w $\mathcal{O}$.

Przykład: przyspieszenie w ruchu po okręgu

Zadanie.

Rozpatrzmy punkt Q, który - w układzie $\mathcal{O}$ - porusza się po okręgu o promieniu R z prędkością kątową $\omega = \chi t$, $t \geqslant 0$.
Chcemy znaleźć przyspieszenie tego punktu w układzie $\mathcal{O}$ i $\mathcal{O}'$, przy czym układ $\mathcal{O}'$ wiruje wraz z poruszającym się punktem, a środki układów się pokrywają. W chwili $t = 0$ osie x i x' oraz y i y' - odpowiednio - się pokrywały, a położenie punktu Q w układzie $\mathcal{O}'$ dane jest przez $(x', y') = (R, 0)$.
Zauważmy, że związek między wersorami obu układów jest następujący:

$$\vec{e}_{x'}' = \cos\alpha(t)\vec{e}_x + \sin\alpha(t)\vec{e}_y,$$

$$\vec{e}_{y'}' = -\sin\alpha(t)\vec{e}_x + \cos\alpha(t)\vec{e}_y,$$

gdzie $\alpha(t)$ jest kątem obrotu układu $\mathcal{O}'$ względem $\mathcal{O}$.

Rozwiązanie

Prędkość w układzie $\mathcal{O}$ ma wartość $v = \chi R t$ oraz składowe:

$$v_x = -\chi R t \sin\alpha \vec{e}_x,$$
$$v_y = \chi R t \cos\alpha \vec{e}_y,$$
$$\alpha(t) = \frac{1}{2}\chi t^2.$$

Prędkość w układzie $\mathcal{O}'$ wynosi - na podstawie treści zadania - zero, ale możemy ją wyznaczyć stosując zależność $\vec{v'} = \vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{r'}$. Iloczyn wektorowy obliczamy w układzie primowanym. $\vec{\omega}$ ma takie same składowe $(0{,}0{,}\omega)$ w obu układach.

$$(v_{x'}, v_{y'}) = -\chi R t \sin\alpha \vec{e}_x + \chi R t \cos\alpha \vec{e}_y - \omega R \vec{e'}_{y'} = (0,0)$$

Przyspieszenie w układzie "primowanym" jest równe zero (punkt Q jest w tym układzie nieruchomy). Ponieważ $\vec{a}_{tr} = 0$, $\vec{v'} = 0$, więc powinniśmy stwierdzić, że

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'}).$$

Lewą stronę obliczamy różniczkując składowe prędkości w układzie $\mathcal{O}$:

$$a_x = (-\chi R \sin\frac{\chi t^2}{2} - \chi^2 R t^2 \cos\frac{\chi t^2}{2})\vec{e}_x,$$
$$a_x = (\chi R \cos\frac{\chi t^2}{2} - \chi^2 R t^2 \sin\frac{\chi t^2}{2})\vec{e}_y,$$
$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y = \chi R \vec{e}_{y'} - \chi^2 t^2 R \vec{e}_{x'}.$$

Zauważmy, na marginesie, że wersory $\vec{e}_{x'}$ i $\vec{e}_{y'}$ są równe, odpowiednio, wersorom układu biegunowego związanego z $\mathcal{O}$:

$$\vec{a} = -\chi^2 t^2 R \vec{e}_\varrho + \chi R \vec{e}_\varphi.$$

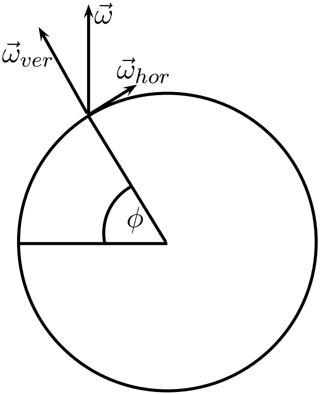
Prawą stronę obliczamy w układzie $\mathcal{O}'$:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r'} = (0, 0, \chi) \times (R, 0, 0) = \chi R\vec{e'}_{y'}$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'}) = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot R\vec{e'}_{x'}) - R\vec{e'}_{x'}\omega^2 = -\chi^2 t^2 R\vec{e'}_{x'}.$$

Widać, że obliczenia różnych wielkości w dwóch układach współrzędnych dają ten sam wynik.

Ruch obrotowy Ziemi

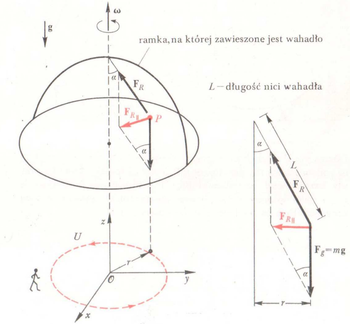


Prędkość kątową ruchu obrotowego Ziemi rozkładamy na dwie składowe:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{ver} + \vec{\omega}_{hor}.$$

ω_{ver} jest prędkością kątową obrotu płaszczyzny horyzontu wokół kierunku radialnego - odpowiada za zmianę płaszczyzny wahań wahadła Foucaulta. Prędkość ω_{hor} określa szybkość podnoszenia się płaszyzny horyzontu na zachodzie i opuszczania się na wschodzie.

Wahadło na obracającej się Ziemi

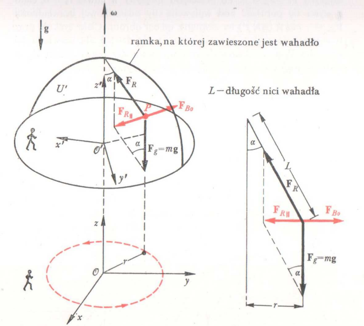


Obserwator $\mathcal{O}$: ciało P porusza się po okręgu o promieniu r pod wpływem siły dośrodkowej, będącej składową reakcji nici $\mathbf{F}_{R||}$; nadaje mu ona przyspieszenie dośrodkowe $\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) = -\omega^2\mathbf{r}$. Kąt wychylenia α można obliczyć następująco:

$$F_{R||} = m\omega^2 r = m\omega^2 L\sin\alpha,$$

gdyż, jak widać z rysunku, $r = L\sin\alpha$, oraz $\mathrm{tg}\,\alpha = F_{R||}/F_g = m\omega^2 L\sin\alpha/mg$. Stąd

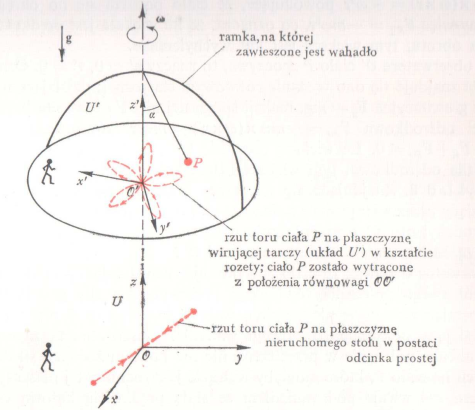
$$\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 L}.$$



Obserwator $\mathcal{O}'$: ciało P znajduje się w równowadze statycznej ze względu na znikanie sumy siły grawitacyjnej $\mathbf{F}_g$ i reakcji sprężystej nici $\mathbf{F}_R$ oraz siły bezwładności odśrodkowej $\mathbf{F}_{Bo}$: $\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_R + \mathbf{F}_{Bo} = 0$. Oczywiście $F_{Bo} = m\omega^2 r = m\omega^2 r = F_{R||}$; a więc obserwator $\mathcal{O}'$ znajdzie tę samą zależność dla kąta wychylenia α, co obserwator $\mathcal{O}$.

AKW & JAZ, *Wstęp do fizyki*

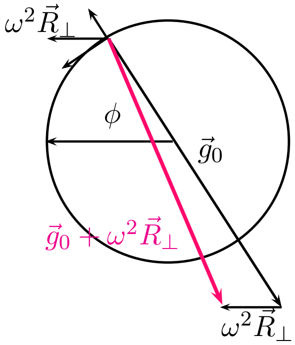
Wahadło Faucaulta



Obserwator O: ciało P porusza się w niezmiennej w przestrzeni płaszczyźnie wahań, ponieważ nie działają na nie żadne siły, które mogłyby wytrącić je z ruchu w tej płaszczyźnie. Rzut toru ciała na płaszczyznę stołu xy jest odcinkiem prostej.

Zademonstrowane przez Jeana Bernarda Leona Foucaulta w Obserwatorium Astronomicznym w Paryżu w 1851 r. jest dowodem dobowego ruchu obrotowego Ziemi. Płaszczyzna wahań obraca się z częstością $\omega_{ver} = \omega \sin \phi$.

Siła odśrodkowa i przyspieszenie na powierzchni Ziemi



Z powodu ruchu Ziemi wokół osi, mierzona wartość przyspieszenia ziemskiego zależy od szerokości geograficznej ϕ. Jeśli ciało nie porusza się względem Ziemi, to działa na niego siła bezwładności skierowana wzdłuż promienia równoleżnika, związana z przyspieszeniem odśrodkowym $\omega^2 R_\perp = \omega^2 R \cos\phi$. Wskutek tego wypadkowe przyspieszenie ziemskie nie ma kierunku radialnego i opisane jest wektorem $\vec{g}(\phi)$, który spełnia równanie: $\vec{g}_0 = \vec{g}(\phi) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}(\phi))$, gdzie $\vec{g}_0$ jest przyspieszeniem grawitacyjnym mierzonym w układzie inercjalnym na powierzchni kuli o masie i promieniu Ziemi.

Spadek swobodny przy powierzchni Ziemi

Przyspieszenie odśrodkowe ma dwie składowe: radialną i horyzontalną. Składowa radialna dodaje się do skierowanego radialnie wektora $\vec{g}_0$. Składowa horyzontalna odpowiada za odchylanie toru ciała spadającego swobodnie: na południe na półkuli północnej i na północ na półkuli południowej.

Podczas spadku ciało się porusza w układzie nieinercjalnym ($\vec{v}' \neq 0$), w związku z czym pojawia się dodatkowy efekt - przyspieszenie Coriolisa, które na obu półkulach powoduje odchylenie toru na wschód.

Czyli, tor spadającego ciała odchyla się od kierunku radialnego na południowy wschód na półkuli północnej i na północny wschód na półkuli południowej.