Fizyka I (mechanika) 1100 - 1AF14
Fizyka I 1100 - 1B01

Wykład 5

Jerzy Łusakowski

Plan wykładu

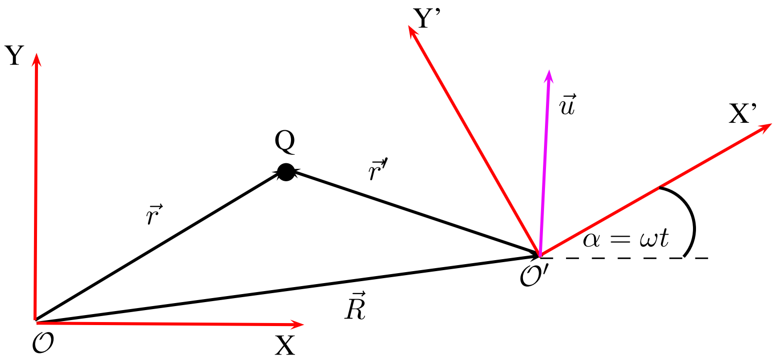
Transformacja $\vec{v}$ i $\vec{a}$ między układem inercjalnym a nieinercjalnym

Ziemia jako układ nieinercjalny

Pęd i środek masy

Zderzenia

Dwaj obserwatorzy - związek między *mierzonymi* współrzędnymi punktu



Chcemy wyrazić położenie, prędkość i przyspieszenie *mierzone* w układzie $\mathcal{O}$ przez położenie, prędkość i przyspieszenie *mierzone* w układzie $\mathcal{O}'$

Zacznijmy od położenia. Zgodnie z rysunkiem

$$\vec{r} = \vec{r'} + \vec{R}$$

ale zauważmy, że chcemy, aby $\vec{r'}$ był wyznaczony przez współrzędne i wersory układu primowanego:

$$x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = x'\vec{e'}_{x'} + y'\vec{e'}_{y'} + z'\vec{e'}_{z'} + R_x\vec{e}_x + R_y\vec{e}_y + R_z\vec{e}_z.$$

Dla uproszczenia rachunków zakładamy, że ruch względny układów (złożony z obrotu i przesunięcia) jest ograniczony do płaszczyzny xy. Wtedy

$$\vec{e'}_{x'} = \cos\alpha\vec{e}_x + \sin\alpha\vec{e}_y$$
$$\vec{e'}_{y'} = -\sin\alpha\vec{e}_x + \cos\alpha\vec{e}_y$$
$$\vec{e'}_{z'} = \vec{e}_z.$$

Po podstawieniu i prostych przekształceniach otrzymamy:

$$\left\{\begin{array}{lcc} x & = & (x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) + R_x \\ y & = & (x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + R_y \\ z & = & z' + R_z \end{array}\right. \tag{1}$$

oraz

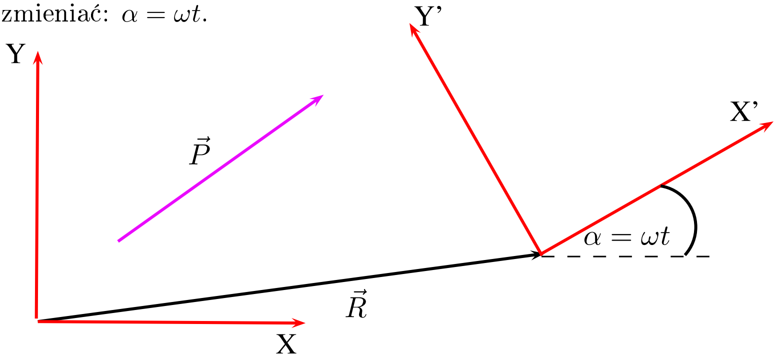
$$\left\{\begin{array}{lcc} x' & = & (x - R_x)\cos\alpha + (y - R_y)\sin\alpha \\ y' & = & -(x - R_x)\cos\alpha + (y - R_y)\sin\alpha \\ z' & = & z - R_z \end{array}\right. \tag{2}$$

Te równania należy rozumieć w następujący sposób: jeśli obserwator $\mathcal{O}$ *mierzy* w układzie odniesienia $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ współrzędne (x, y, z) punktu P, a oberwator $\mathcal{O}'$ *mierzy* w układzie odniesienia $\vec{e'}_x, \vec{e'}_y, \vec{e'}_z$ współrzędne (x', y', z') tego punktu, to równania (1) i (2) dają związki między współrzędnymi. **Podkreślmy: każdy z obserwatorów rzutuje wektor położenia na osie *własnego* układu odniesienia.**

$$x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z - R_x\vec{e}_x - R_y\vec{e}_y - R_z\vec{e}_z = x'\vec{e'}_{x'} + y'\vec{e'}_{y'} + z'\vec{e'}_{z'}$$

Dwaj obserwatorzy - związek między *mierzoną* pochodną wektora

Zajmiemy się teraz znalezieniem relacji pomiędzy pochodną wektora $\vec{P}$ mierzoną przez obserwatorów $\mathcal{O}$ i $\mathcal{O}'$. $\vec{P}$ jest dowolnym wektorem, może symbolizować wektor położenia, prędkości, itp. Zakładamy też, że kąt obrotu między jednego układu względem drugiego może się zmieniać: $\alpha = \omega t$.



W układzie $\mathcal{O}$: $\vec{P} = P_x\vec{e}_x + P_y\vec{e}_y + P_z\vec{e}_z.$

W układzie $\mathcal{O}'$: $\vec{P} = P'_{x'}\vec{e'}_{x'} + P'_{y'}\vec{e'}_{y'} + P'_{z'}\vec{e'}_{z'}.$

Wprowadźmy *oznaczenie* $\vec{P}'$:

$$\vec{P}' = P'_{x'}\vec{e'}_{x'} + P'_{y'}\vec{e'}_{y'} + P'z'\vec{e'}_{z'}.$$

rozumiejąc to w ten sposób, że wektor $\vec{P}'$ jest to wektor $\vec{P}$ wyrażony przez *współrzędne i wersory* układu $\mathcal{O}'$.

$$\vec{P} = P_x\vec{e}_x + P_y\vec{e}_y + P_z\vec{e}_z = P'_{x'}\vec{e'}_{x'} + P'_{y'}\vec{e'}_{y'} + P'_{z'}\vec{e'}_{z'} = \vec{P}'.$$

Podstawiając wersory "primowane" otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= P'_{x'}\vec{e'}_{x'} + P'_{y'}\vec{e'}_{y'} + P'_{z'}\vec{e'}_{z'} = \\ &= P'_{x'}(\cos\alpha\vec{e}_x + \sin\alpha\vec{e}_y) + P'_{y'}(-\sin\alpha\vec{e}_x + \cos\alpha\vec{e}_y) + P'_{z'}\vec{e}_z = \\ &= (P'_{x'}\cos\alpha - P'_{y'}\sin\alpha)\vec{e}_x + (P'_{x'}\sin\alpha + P'_{y'}\cos\alpha)\vec{e}_y + P'_{z'}\vec{e}_z. \end{aligned}$$

Zastanówmy się, co oznacza ta równość w prostym przypadku, gdy wektor $\vec{P}$ jest wektorem stałym w układzie $\mathcal{O}$. Jeśli orientacja układu $\mathcal{O}'$ względem układu $\mathcal{O}$ jest ustalona (tzn. kąt α nie zmienia się w czasie) to współrzędne "primowane" też muszą być stałe w czasie. Inaczej jest, gdy układ "primowany" obraca się względem "nieprimowanego" - widać, że w takiej sytuacji zmiana wartości funkcji $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ musi być skompensowana zmianą wartości współrzędnych primowanych. Inaczej mówiąc, dla obserwatora $\mathcal{O}'$ wektor $\vec{P}$ zmienia się (bo zmieniają się jego współrzędne w układzie primowanym). Zatem, mimo że pochodna wektora $\vec{P}$ w układzie $\mathcal{O}$ jest równa zero, w układzie $\mathcal{O}'$ jest różna od zera. Znajdziemy teraz związek między tymi pochodnymi.

W ogólności, zmieniają się współrzędne wektora $\vec{P}$ w obu układach. Zgodnie z założeniem, że ruch obrotowy zachodzi tylko w płaszczyźnie xy, mamy $\alpha = \omega t$, gdzie wektor prędkości kątowej $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$ jest *mierzony przez obserwatora $\mathcal{O}$*. Różniczkując (i wykorzystując związki między wersorami w obu układach), dostajemy:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{dP_x}{dt}\vec{e}_x + \frac{dP_y}{dt}\vec{e}_y + \frac{dP_z}{dt}\vec{e}_z =$$

$$= \frac{dP'_{x'}}{dt}\vec{e'}_{x'} + \frac{dP'_{y'}}{dt}\vec{e'}_{y'} + \frac{dP'_{z'}}{dt}\vec{e'}_{z'} - \omega P'_{y'}\vec{e'}_{x'} + \omega P'_{x'}\vec{e'}_{y'}.$$

Czyli:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{P'}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{P'}.$$

Zastosujmy ten wynik do wektora położenia punktu Q: $\vec{r} = \vec{r'} + \vec{R}$. Wektor $\vec{R}$ jest położeniem $\mathcal{O}$ względem $\mathcal{O}'$, wyrażonym we współrzędnych "nieprimowanych". Aby uzyskać pełną analogię z powyższym rozumowaniem, obliczmy pochodną wektora $\vec{r} - \vec{R} = \vec{r'}$:

$$\frac{d(\vec{r} - \vec{R})}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

$$\vec{v} - \vec{u} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}',$$

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}',$$

gdzie:
$\vec{v}$ - mierzona przez $\mathcal{O}$ zmiana wektora $\vec{r}$ (wyrażona przez współrzędne i wersory "nieprimowane"), czyli prędkość punktu Q w układzie $\mathcal{O}$;
$\vec{v'}$ - mierzona przez $\mathcal{O}'$ zmiana wektora $\vec{r'}$ (wyrażona przez współrzędne i wersory "primowane"), czyli prędkość punktu Q w układzie $\mathcal{O}'$;
$\vec{u}$ - mierzona przez $\mathcal{O}$ zmiana wektora $\vec{R}$ (wyrażona przez współrzędne i wersory "nieprimowane"), czyli prędkość $\mathcal{O}'$ w układzie $\mathcal{O}$.

Znajdźmy teraz związek między przyspieszeniami:

$$\vec{v} - \vec{u} = \vec{v'} + \vec{\omega} \times \vec{r'}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{v} - \vec{u}) = \frac{d}{dt}(\vec{v'} + \vec{\omega} \times \vec{r'}) + \vec{\omega} \times (\vec{v'} + (\omega \times \vec{r'}))$$

Ostatecznie, otrzymujemy:

$$\vec{a} = \vec{a'} + \vec{a}_{tr} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r'} + 2\vec{\omega} \times \vec{v'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'}),$$

gdzie:
$\vec{a'}$ - przyspieszenie mierzone w $\mathcal{O}'$;
$\vec{a}_{tr} = \frac{d\vec{u}}{dt}$ - przyspieszenie postępowe $\mathcal{O}'$ względem $\mathcal{O}$, mierzone w $\mathcal{O}$;
$2\vec{\omega} \times \vec{v'}$ - przyspieszenie Coriolisa; $\vec{v'}$ - mierzone w $\mathcal{O}'$;
$\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r'}$ - przyspieszenie kątowe $\mathcal{O}'$ względem $\mathcal{O}$;
$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'})$ - przyspieszenie dośrodkowe.
Zauważmy, że $\vec{a}$, $\vec{a}_{tr}$ oraz $\vec{\omega}$ są mierzone w $\mathcal{O}$.

Przykład: przyspieszenie w ruchu po okręgu

Zadanie.

Rozpatrzmy punkt Q, który - w układzie $\mathcal{O}$ - porusza się po okręgu o promieniu R z prędkością kątową $\omega = \chi t$, $t \geqslant 0$. Chcemy znaleźć przyspieszenie tego punktu w układzie $\mathcal{O}$ i $\mathcal{O}'$, przy czym układ $\mathcal{O}'$ wiruje wraz z poruszającym się punktem, a środki układów się pokrywają. W chwili $t = 0$ osie x i x' oraz y i y' - odpowiednio - się pokrywały, a położenie punktu Q w układzie $\mathcal{O}'$ dane jest przez $(x', y') = (R, 0)$.
Zauważmy, że związek między wersorami obu układów jest następujący:

$$\vec{e}'_{x'} = \cos\alpha(t)\vec{e}_x + \sin\alpha(t)\vec{e}_y,$$

$$\vec{e}'_{y'} = -\sin\alpha(t)\vec{e}_x + \cos\alpha(t)\vec{e}_y,$$

gdzie $\alpha(t)$ jest kątem obrotu układu $\mathcal{O}'$ względem $\mathcal{O}$.

Rozwiązanie

Prędkość w układzie $\mathcal{O}$ ma wartość $v = \chi R t$ oraz składowe:

$$v_x = -\chi R t \sin\alpha \vec{e}_x,$$
$$v_y = \chi R t \cos\alpha \vec{e}_y,$$
$$\alpha(t) = \frac{1}{2}\chi t^2.$$

Prędkość w układzie $\mathcal{O}'$ wynosi - na podstawie treści zadania - zero, ale możemy ją wyznaczyć stosując zależność $\vec{v'} = \vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{r'}$. Iloczyn wektorowy obliczamy w układzie primowanym. $\vec{\omega}$ ma takie same składowe $(0,0,\omega)$ w obu układach.

$$(v_{x'}, v_{y'}) = -\chi R t \sin\alpha \vec{e}_x + \chi R t \cos\alpha \vec{e}_y - \omega R \vec{e'}_{y'} = (0,0)$$

Przyspieszenie w układzie "primowanym" jest równe zero (punkt Q jest w tym układzie nieruchomy). Ponieważ $\vec{a}_{tr} = 0$, $\vec{v'} = 0$, więc powinniśmy stwierdzić, że

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'}).$$

Lewą stronę obliczamy różniczkując składowe prędkości w układzie $\mathcal{O}$:

$$a_x = (-\chi R \sin\frac{\chi t^2}{2} - \chi^2 R t^2 \cos\frac{\chi t^2}{2})\vec{e}_x,$$
$$a_x = (\chi R \cos\frac{\chi t^2}{2} - \chi^2 R t^2 \sin\frac{\chi t^2}{2})\vec{e}_y,$$
$$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y = \chi R\vec{e}_{y'} - \chi^2 t^2 R\vec{e}_{x'}.$$

Zauważmy, na marginesie, że wersory $\vec{e}_{x'}$ i $\vec{e}_{y'}$ są równe, odpowiednio, wersorom układu biegunowego związanego z $\mathcal{O}$:

$$\vec{a} = -\chi^2 t^2 R\vec{e}_\varrho + \chi R\vec{e}_\varphi.$$

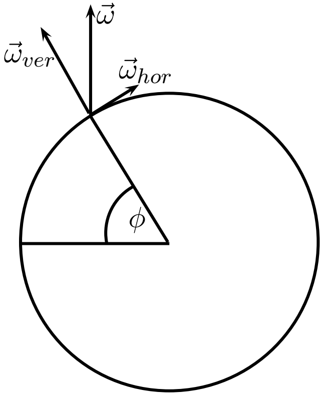
Prawą stronę obliczamy w układzie $\mathcal{O}'$:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r'} = (0, 0, \chi) \times (R, 0, 0) = \chi R\vec{e'}_{y'}$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'}) = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot R\vec{e'}_{x'}) - R\vec{e'}_{x'}\omega^2 = -\chi^2 t^2 R\vec{e'}_{x'}.$$

Widać, że obliczenia różnych wielkości w dwóch układach współrzędnych dają ten sam wynik.

Ruch obrotowy Ziemi

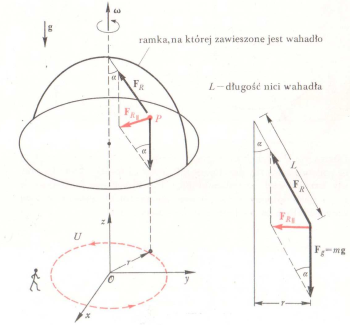


Prędkość kątową ruchu obrotowego Ziemi rozkładamy na dwie składowe:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{ver} + \vec{\omega}_{hor}.$$

ω_{ver} jest prędkością kątową obrotu płaszczyzny horyzontu wokół kierunku radialnego - odpowiada za zmianę płaszczyzny wahań wahadła Foucaulta. Prędkość ω_{hor} określa szybkość podnoszenia się płaszyzny horyzontu na zachodzie i opuszczania się na wschodzie.

Wahadło na obracającej się Ziemi

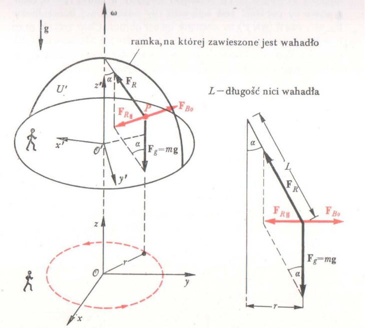


Obserwator $\mathcal{O}$: ciało P porusza się po okręgu o promieniu r pod wpływem siły dośrodkowej, będącej składową reakcji nici $\mathbf{F}_{R||}$; nadaje mu ona przyspieszenie dośrodkowe $\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = -\omega^2\mathbf{r}$. Kąt wychylenia α można obliczyć następująco:

$$F_{R||} = m\omega^2 r = m\omega^2 L \sin\alpha,$$

gdyż, jak widać z rysunku, $r = L\sin\alpha$, oraz $\operatorname{tg}\alpha = F_{R||}/F_g = m\omega^2 L \sin\alpha / mg$. Stąd

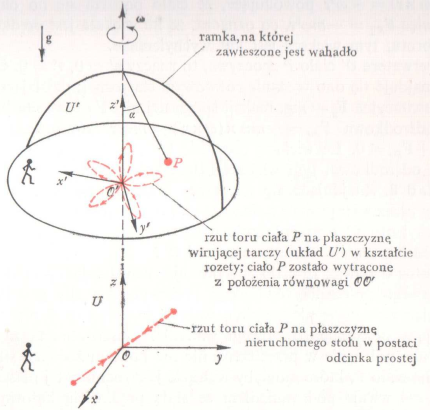
$$\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 L}.$$



Obserwator $\mathcal{O}'$: ciało P znajduje się w równowadze statycznej ze względu na znikanie sumy siły grawitacyjnej $\mathbf{F}_g$ i reakcji sprężystej nici $\mathbf{F}_R$ oraz siły bezwładności odśrodkowej $\mathbf{F}_{Bo}$: $\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_R + \mathbf{F}_{Bo} = 0$. Oczywiście $F_{Bo} = m\omega^2 r = m\omega^2 r = F_{R||}$; a więc obserwator $\mathcal{O}'$ znajdzie tę samą zależność dla kąta wychylenia α, co obserwator $\mathcal{O}$.

AKW & JAZ, *Wstęp do fizyki*

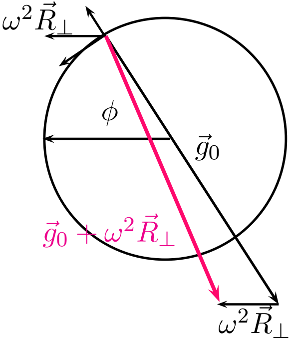
Wahadło Foucaulta



Obserwator O: ciało P porusza się w niezmiennej w przestrzeni płaszczyźnie wahań, ponieważ nie działają na nie żadne siły, które mogłyby wytrącić je z ruchu w tej płaszczyźnie. Rzut toru ciała na płaszczyznę stołu xy jest odcinkiem prostej.

Zademonstrowane przez Jeana Bernarda Leona Foucaulta w Obserwatorium Astronomicznym w Paryżu w 1851 r. jest dowodem dobowego ruchu obrotowego Ziemi. Płaszczyzna wahań obraca się z częstością $\omega_{ver} = \omega \sin\phi$.

Siła odśrodkowa i przyspieszenie na powierzchni Ziemi



Z powodu ruchu Ziemi wokół osi, mierzona wartość przyspieszenia ziemskiego zależy od szerokości geograficznej ϕ. Jeśli ciało nie porusza się względem Ziemi, to działa na niego siła bezwładności skierowana wzdłuż promienia równoleżnika, związana z przyspieszeniem odśrodkowym $\omega^2 R_\perp = \omega^2 R \cos\phi$. Wskutek tego wypadkowe przyspieszenie ziemskie nie ma kierunku radialnego i opisane jest wektorem $\vec{g}(\phi)$, który spełnia równanie: $\vec{g}_0 = \vec{g}(\phi) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}(\phi))$, gdzie $\vec{g}_0$ jest przyspieszeniem grawitacyjnym mierzonym w układzie inercjalnym na powierzchni kuli o masie i promieniu Ziemi.

Spadek swobodny przy powierzchni Ziemi

Przyspieszenie odśrodkowe ma dwie składowe: radialną i horyzontalną. Składowa radialna dodaje się do skierowanego radialnie wektora $\vec{g}_0$. Składowa horyzontalna odpowiada za odchylanie toru ciała spadającego swobodnie: na południe na półkuli północnej i na północ na półkuli południowej.

Podczas spadku ciało się porusza w układzie nieinercjalnym ($\vec{v}' \neq 0$), w związku z czym pojawia się dodatkowy efekt - przyspieszenie Coriolisa, które na obu półkulach powoduje odchylenie toru na wschód.

Czyli, tor spadającego ciała odchyla się od kierunku radialnego na południowy wschód na półkuli północnej i na północny wschód na półkuli południowej.

Pęd - definicja

Doświadczenie poucza, że w zagadnieniach związanych z dynamiką ważna jest nie tyle prędkość, co iloczyn prędkości i masy, zwany pędem.

Definicja. Cząstka o masie m, poruszająca się z prędkością $\vec{v}$ ma pęd:

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

W przypadku układu N punktów, całkowity pęd układu $\vec{P}_c$ jest (wektorową) sumą pędów wszystkich punktów:

$$\vec{P}_c = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$$

Pęd i druga zasada dynamiki

II zasadę dynamiki

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

możemy zapisać w równoważnej postaci:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

co umożliwia bardziej ogólne spojrzenie na relację siła - ruch. Całkując to równanie po czasie, dostajemy:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt,$$

$$\vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt,$$

co wyrażamy stwierdzeniem , że zmiana pędu jest równa popędowi siły.

Pęd układu mas

Rozpatrzmy układ N ciał o masach m_1, ..., m_N, poruszających się - odpowiednio - z prędkością v_1, ..., v_N. Zakładamy, że ciała oddziałują ze sobą siłami Newtonowskimi, tzn. spełniona jest III zasada dynamiki: $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$. Dodatkowo, na każde ciało może działać siła $\vec{Q}_i$, która nie jest związana z oddziaływaniem między ciałami.

W takiej sytuacji możemy napisac:

$$\frac{d(m_1\vec{v}_1)}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \cdots + \vec{F}_{1N} + \vec{Q}_1$$
$$\frac{d(m_2\vec{v}_2)}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{24} + \cdots + \vec{F}_{2N} + \vec{Q}_2$$
$$\vdots$$
$$\frac{d(m_N\vec{v}_N)}{dt} = \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{N2} + \vec{F}_{N3} + \cdots + \vec{F}_{N,N-1} + \vec{Q}_N$$

Sumując stronami, dostajemy:

$$\frac{d}{dt}\vec{P}_c = \sum_{i=1}^{N} \vec{Q}_i = \vec{Q}_c$$

Oznacza to, że:
– siły wewnętrzne spełniające III zasadę dynamiki nie mogą zmienić całkowitego pędu układu;
– zmiana całkowitego pędu układu wynika z działania sił zewnętrznych

Zasada zachowania pędu

Na podstawie powyższego równania można sformułować zasadę zachowania pędu:

Jeżeli na układ nie działają zewnętrzne siły, to pęd układu jest zachowany.

Środek masy

Wprowadźmy wielkość, która jest bardzo użyteczna przy rozpatrywaniu ruchu układu mas.
Definiujemy wektor położenia środka masy $\vec{R}_{SM}$ w następujący sposób:

$$\vec{R}_{SM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}.$$

$\vec{r}_i$ jest wektorem łączącym początek układu współrzędnych z masą m_i. Układ ten może być wybrany zupełnie dowolnie.
Zauważmy, że ciało podparte w środku masy się nie obraca - wypadkowy moment siły ciężkości względem środka masy jest równy zero:

$$\sum_i m_i(\vec{r}_i - \vec{R}_{SM}) \times \vec{g} = (\sum_i m_i \vec{r}_i - \sum_i m_i \vec{R}_{SM}) \times \vec{g} = 0$$

Pęd układu mas jest równy:

$$\vec{P}_c = \sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{d}{dt}\sum_i (m_i \vec{r}_i) = \frac{d}{dt}(M\vec{R}_{SM}) = M\vec{V}_{SM}$$

Pęd układu mas jest taki, jak gdyby cała masa poruszała się z prędkością równą prędkości środka masy.
Dalej, mamy

$$\frac{d\vec{P}_c}{dt} = M\frac{d\vec{V}_{SM}}{dt} = M\vec{A}_{SM},$$

oraz

$$M\vec{A}_{SM} = \vec{Q}_c$$

Dla układu odosobnionego, $\vec{Q}_c = 0$, $\vec{A}_{SM} = 0$ i $\vec{V}_{SM} = \text{const}$.

Zderzenia sprężyste i niesprężyste

O zderzeniu mówimy wtedy, gdy dwa lub więcej ciał oddziałuje na siebie stosunkowo dużymi siłami w stosunkowo krótkim czasie.

Jeśli w zderzeniu zachowana jest energia kinetyczna zderzających się ciał, to mówimy, że zderzenie jest sprężyste.

Jeśli tak nie jest, to zderzenie jest niesprężyste, a w szczególnym przypadku sklejenia się ciał po zderzenieu – całkowicie niesprężyste.

Zderzenie nie musi oznaczać bezpośredniego kontaktu obiektów, np. oddziaływanie komety z planetą lub gwiazdą, prowadzące do zakrzywienia toru lotu, jest zderzeniem.

Zasady zachowania

Mamy do dyspozycji:

- Zasadę zachowania pędu
- Zasadę zachowania energii (w zderzeniach sprężystych – energii kinetycznej)
- Zasadę zachowania momentu pędu
- Inne zasady zachowania, które muszą być spełnione w przypadku zderzeń cząstek elementarnych

Zderzenie niesprężyste dwóch mas w układzie LAB

Przypuśćmy, że dwie masy m_1 i m_2 poruszają się z prędkością, odpowiednio, $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$. W chwili $t = 0$ znajdowały się w miejscu, odpowiednio, o współrzędnych $\vec{r}_{10}$ i $\vec{r}_{20}$. Zakładamy, że nastąpiło zderzenie całkowicie niesprężyste, tzn., masy się skleiły. Zasada zachowania pędu daje:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{V}$$

$$\vec{V} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \vec{V}_{SM}$$

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_{10} + \vec{v}_1 t, \quad \vec{r}_2(t) = \vec{r}_{20} + \vec{v}_2 t$$

$$\vec{R}_{SM}(t) = \frac{\vec{r}_{10}m_1 + \vec{r}_{20}m_2 + m_1\vec{v}_1 t + m_2\vec{v}_2 t}{m_1 + m_2} = \vec{R}_{SM}(t=0) + \vec{V}_{SM} t$$

Zderzenie niesprężyste dwóch mas w układzie SM

Przed zderzeniem:

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{V}_{SM} = \frac{m_2(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{m_1 + m_2}, \quad u_2 = \vec{v}_2 - \vec{V}_{SM} = \frac{m_1(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{P}_{SM}^{przed} = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = 0$$

Po zderzeniu:

$$\vec{P}_{SM}^{po} = 0,$$

czyli sklejone masy spoczywają w układzie SM.
Układ środka masy jest wyróżniony z tego powodu, że całkowity pęd układu względem środka masy jest równy zero. Poza tym, ruch układu jako całości jest zwykle mniej interesujący niż ruch względny, więc przechodząc do układu środka masy eliminujemy z rozważań ten mniej ciekawy aspekt ruchu.