Fizyka I (mechanika) 1100 - 1AF14
Fizyka I 1100 - 1B01

Wykład 6

Jerzy Łusakowski

Plan wykładu

Pęd

Zderzenia

Zderzenia niecentralne

Ruch układów o zmiennej masie

Pęd i druga zasada dynamiki

II zasadę dynamiki

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

możemy zapisać w równoważnej postaci:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

co umożliwia bardziej ogólne spojrzenie na relację siła - ruch. Całkując to równanie po czasie, dostajemy:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt,$$

$$\vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt,$$

co wyrażamy stwierdzeniem , że zmiana pędu jest równa popędowi siły.

Pęd układu mas

Rozpatrzmy układ N ciał o masach m_1, ..., m_N, poruszających się - odpowiednio - z prędkością v_1, ..., v_N. Zakładamy, że ciała oddziałują ze sobą siłami Newtonowskimi, tzn. spełniona jest III zasada dynamiki: $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$. Dodatkowo, na każde ciało może działać siła $\vec{Q}_i$, która nie jest związana z oddziaływaniem między ciałami.

W takiej sytuacji możemy napisac:

$$\frac{d(m_1\vec{v}_1)}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \cdots + \vec{F}_{1N} + \vec{Q}_1$$

$$\frac{d(m_2\vec{v}_2)}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{24} + \cdots + \vec{F}_{2N} + \vec{Q}_2$$

$$\vdots$$

$$\frac{d(m_N\vec{v}_N)}{dt} = \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{N2} + \vec{F}_{N3} + \cdots + \vec{F}_{N,N-1} + \vec{Q}_N$$

Sumując stronami, dostajemy:

$$\frac{d}{dt}\vec{P}_c = \sum_{i=1}^{N} \vec{Q}_i = \vec{Q}_c$$

Oznacza to, że:
– siły wewnętrzne spełniające III zasadę dynamiki nie mogą zmienić całkowitego pędu układu;
– zmiana całkowitego pędu układu wynika z działania sił zewnętrznych

Zasada zachowania pędu

Na podstawie powyższego równania można sformułować zasadę zachowania pędu:

Jeżeli na układ nie działają zewnętrzne siły, to pęd układu jest zachowany.

Środek masy

Wprowadźmy wielkość, która jest bardzo użyteczna przy rozpatrywaniu ruchu układu mas.
Definiujemy wektor położenia środka masy $\vec{R}_{SM}$ w następujący sposób:

$$\vec{R}_{SM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}.$$

$\vec{r}_i$ jest wektorem łączącym początek układu współrzędnych z masą m_i. Układ ten może być wybrany zupełnie dowolnie.
Zauważmy, że ciało podparte w środku masy się nie obraca - wypadkowy moment siły ciężkości względem środka masy jest równy zero:

$$\sum_i m_i(\vec{r}_i - \vec{R}_{SM}) \times \vec{g} = (\sum_i m_i \vec{r}_i - \sum_i m_i \vec{R}_{SM}) \times \vec{g} = 0$$

Pęd układu mas jest równy:

$$\vec{P}_c = \sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{d}{dt} \sum_i (m_i \vec{r}_i) = \frac{d}{dt}(M\vec{R}_{SM}) = M\vec{V}_{SM}$$

Pęd układu mas jest taki, jak gdyby cała masa poruszała się z prędkością równą prędkości środka masy.
Dalej, mamy

$$\frac{d\vec{P}_c}{dt} = M\frac{d\vec{V}_{SM}}{dt} = M\vec{A}_{SM},$$

oraz

$$M\vec{A}_{SM} = \vec{Q}_c$$

Dla układu odosobnionego, $\vec{Q}_c = 0$, $\vec{A}_{SM} = 0$ i $\vec{V}_{SM} = \mathrm{const.}$

Zderzenia sprężyste i niesprężyste

O zderzeniu mówimy wtedy, gdy dwa lub więcej ciał oddziałuje na siebie stosunkowo dużymi siłami w stosunkowo krótkim czasie.

Jeśli w zderzeniu zachowana jest energia kinetyczna zderzających się ciał, to mówimy, że zderzenie jest sprężyste.

Jeśli tak nie jest, to zderzenie jest niesprężyste, a w szczególnym przypadku sklejenia się ciał po zderzenieu – całkowicie niesprężyste.

Zderzenie nie musi oznaczać bezpośredniego kontaktu obiektów, np. oddziaływanie komety z planetą lub gwiazdą, prowadzące do zakrzywienia toru lotu, jest zderzeniem.

Zasady zachowania

Mamy do dyspozycji:

- Zasadę zachowania pędu
- Zasadę zachowania energii (w zderzeniach sprężystych – energii kinetycznej)
- Zasadę zachowania momentu pędu
- Inne zasady zachowania, które muszą być spełnione w przypadku zderzeń cząstek elementarnych

Zderzenie niesprężyste dwóch mas w układzie LAB

Przypuśćmy, że dwie masy m_1 i m_2 poruszają się z prędkością, odpowiednio, $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$. W chwili $t = 0$ znajdowały się w miejscu, odpowiednio, o współrzędnych $\vec{r}_{10}$ i $\vec{r}_{20}$. Zakładamy, że nastąpiło zderzenie całkowicie niesprężyste, tzn., masy się skleiły. Zasada zachowania pędu daje:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{V}$$

$$\vec{V} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \vec{V}_{SM}$$

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_{10} + \vec{v}_1 t, \quad \vec{r}_2(t) = \vec{r}_{20} + \vec{v}_2 t$$

$$\vec{R}_{SM}(t) = \frac{\vec{r}_{10}m_1 + \vec{r}_{20}m_2 + m_1\vec{v}_1 t + m_2\vec{v}_2 t}{m_1 + m_2} = \vec{R}_{SM}(t=0) + \vec{V}_{SM} t$$

Zderzenie niesprężyste dwóch mas w układzie SM

Przed zderzeniem:

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{V}_{SM} = \frac{m_2(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{m_1 + m_2}, \quad u_2 = \vec{v}_2 - \vec{V}_{SM} = \frac{m_1(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{P}_{SM}^{przed} = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = 0$$

Po zderzeniu:

$$\vec{P}_{SM}^{po} = 0,$$

czyli sklejone masy spoczywają w układzie SM.
Układ środka masy jest wyróżniony z tego powodu, że całkowity pęd układu względem środka masy jest równy zero. Poza tym, ruch układu jako całości jest zwykle mniej interesujący niż ruch względny, więc przechodząc do układu środka masy eliminujemy z rozważań ten mniej ciekawy aspekt ruchu.

Zderzenia sprężyste - przypadek jednowymiarowy

Rozpatrujemy dwie masy m_1 i m_2 poruszające się po linii prostej z prędkościami, odpowiednio, $v_{1,i}$ oraz $v_{2,i}$. Po zderzeniu sprężystym prędkości wynoszą, odpowiednio, $v_{1,f}$ oraz $v_{2,f}$. Korzystając z zasady zachowania pędu:

$$m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i} = m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f}$$

oraz energii:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,f}^2$$

możemy wyznaczyć prędkości końcowe.

Po prostych przekształceniach otrzymujemy:

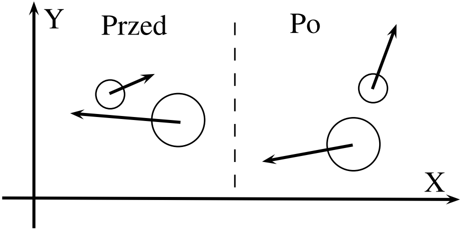
$$v_{1,f} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1,i} + 2m_2 v_{2,i}}{m_1 + m_2}$$

$$v_{2,f} = \frac{(m_2 - m_1)v_{2,i} + 2m_1 v_{1,i}}{m_1 + m_2}$$

Zauważmy, że jedno wyrażenie powstaje z drugiego przez zamianę indeksów $1 \leftrightarrow 2$. Jest to odzwieciedleniem faktu, że obie masy uczestniczą w tym procesie w identyczny sposób. Zauważmy też, że jeśli masy są sobie równe, to w zderzeniu sprężystym następuje "wymiana" prędkości pomiędzy masami:$v_{1,f} = v_{2,i}$, $v_{2,f} = v_{1,i}$.

Zderzenie sprężyste, niecentralne sztywnych kul

Zadanie Dwie kule, jedna o masie m_1 a druga o masie m_2, poruszają się po płaszczyźnie (stanowiącej układ LAB) z prędkością, odpowiednio, $\vec{v}_{1,i}$ i $\vec{v}_{2,i}$. Kule zderzają się sprężyście –zachowany jest całkowity pęd i całkowita energia kinetyczna układu. Wyznaczyć prędkości $\vec{v}_{1,f}$ i $\vec{v}_{2,f}$ kul po zderzeniu. Przeanalizować zderzenie w układzie LAB i SM.



Zderzenia sprężyste na płaszczyźnie

Rozwiązanie W zderzeniach sprężystych jest zachowany *całkowity* pęd układu:

$$\vec{p}_{1,i} + \vec{p}_{2,i} = \vec{p}_{1,f} + \vec{p}_{2,f},$$

czyli, dla współrzędnych x i y:

$$m_1 v_{1,i} \cos\alpha_{1,i} + m_2 v_{2,i} \cos\alpha_{2,i} = m_1 v_{1,f} \cos\alpha_{1,f} + m_2 v_{2,f} \cos\alpha_{2,f}$$

$$m_1 v_{1,i} \sin\alpha_{1,i} + m_2 v_{2,i} \sin\alpha_{2,i} = m_1 v_{1,f} \sin\alpha_{1,f} + m_2 v_{2,f} \sin\alpha_{2,f}$$

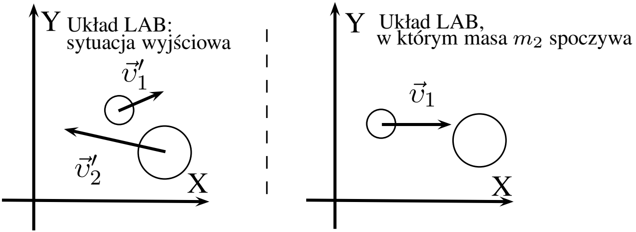
oraz *całkowita* energia kinetyczna:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2 + \frac{1}{2} m_1 v_{2,i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2 + \frac{1}{2} m_1 v_{2,f}^2$$

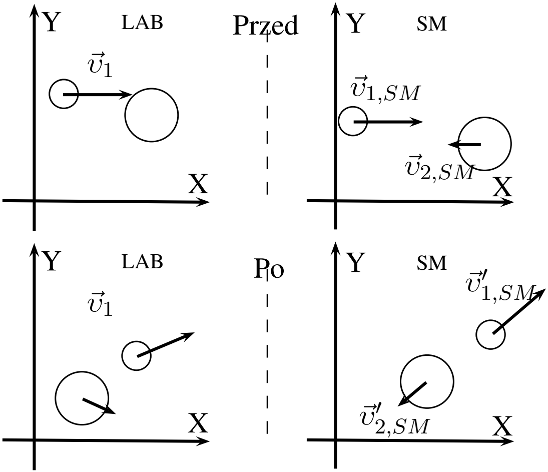
Czyli, dla zderzenia sprężystego mamy trzy równania i cztery niewiadome - w ogólności jest to problem, który można rozwiązać przyjmując dodatkowe założenie (np. znajomość jednego z kątów po zderzeniu).

Zderzenia sprężyste na płaszczyźnie

W przypadku zderzeń niecentralnych wygodnie jest przejść wybrać jako układ LAB taki układ, w którym jedna z kul spoczywa, a druga porusza się wzdłuż osi x. Zauważmy, że zawsze można taki układ znaleźć. W przypadku mas m_1 i m_2 poruszających się z prędkościami, odpowiednio $\vec{v}_1'$ i $\vec{v}_2'$ układem takim może być po prostu układ, w którym masa m_2 spoczywa, a oś x skierowana jest wzdłuż wektora prędkości względnej $\vec{v}_1 = \vec{v}_1' - \vec{v}_2'$.



Zderzenia sprężyste - układ LAB i SM



Transformacja kąta rozproszenia LAB $\leftrightarrow$ SM

Przypuśćmy, że kąt rozproszenia masy m_1 w układzie LAB wynosi $\theta_{1,LAB}$, zaś w układzie SM jest równy $\theta_{1,SM}$.

$$\tan\theta_{1,LAB} = \frac{v'_{1,y}}{v'_{1,x}}$$

$$\tan\theta_{1,SM} = \frac{v'_{1,y,SM}}{v'_{1,x,SM}}$$

Związek między współrzędnymi jest dany transformacją Galileusza (Uwaga: $\vec{V}_{SM}$ określony jest w LAB):

$$v'_{1,x} = v'_{1,x,SM} + V_{SM}$$

$$v'_{1,y} = v'_{1,y,SM}$$

$$\tan\theta_{1,LAB} = \frac{v'_{1,y,SM}}{v'_{1,x,SM} + V_{SM}} = \frac{\sin\theta_{1,SM}}{\cos\theta_{1,SM} + V_{SM}/v'_{1,SM}}$$

Transformacja kąta rozproszenia LAB $\leftrightarrow$ SM

W układzie SM pędy obu mas są równe co do wartości:
przed zderzeniem: $m_1 v_{1,SM} = m_2 v_{2,SM}$
po zderzeniu: $m_1 v'_{1,SM} = m_2 v'_{2,SM}$
Dla zderzeń sprężystych:

$$m_{1,SM} v_{1,SM}^2 + m_{2,SM} v_{2,SM}^2 = m_{1,SM} v_{1,SM}'^2 + m_{2,SM} v_{2,SM}'^2$$

Łącząc te równania dostajemy:

$$v_{1,SM} = v'_{1,SM}$$

$$v_{2,SM} = v'_{2,SM}$$

Ponieważ w naszym przypadku ($\vec{V}_{SM}$ określony jest przez prędkości w LAB)

$$\vec{V}_{SM} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\vec{v}_{1,SM} + \vec{V}_{SM}),$$

to

$$\vec{V}_{SM} = \frac{m_1}{m_2} \vec{v}_{1,SM},$$

co daje

$$\tan \theta_{1,LAB} = \frac{\sin \theta_{1,SM}}{\cos \theta_{1,SM} + \frac{m_1}{m_2}}.$$

Ruch układu o zmiennej masie

Pytanie, jak się zmieni ruch masy m_2, gdy dołączy do niej mała masa $dm_1 \ll m_2$ i działa siła zewnętrzna?
Niech prędkość masy dm_1 i m_2 układzie inercjalnym będzie równa, odpowiednio, $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$.
Pęd początkowy:

$$\vec{p}(t) = dm_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}.$$

Pęd końcowy:

$$\vec{p}(t+dt) = (dm_1 + m_2)(\vec{v}_2 + d\vec{v}_2).$$

Zmiana pędu układu jest równa:

$$d\vec{p} = \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t)$$

$$= m_2 d\vec{v}_2 + dm_1(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) + dm_1 d\vec{v}_2 \approx m_2 d\vec{v}_2 + dm_1(\vec{v}_2 - \vec{v}_1).$$

Ruch układu o zmiennej masie

Masa dm_1 może być dodatnia albo ujemna. Czynimy tu założenie, że prędkość masy dm_1 zmienia się skokowo, zaś masy m_2 - w sposób ciągły.
Wprowadzamy prędkość względną masy dm_1 względem masy m_2:

$$\vec{u} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2.$$

Zmiana pędu układu w jednostce czasu wynosi:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} - \vec{u}\frac{dm_1}{dt}$$

i jest równa działającej na układ sile zewnętrznej $\vec{F}_{zew}$:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{zew}.$$

Ruch układu o zmiennej masie

Mamy zatem uogólnioną postać drugiej zasady dynamiki:

$$m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} - \vec{u}\frac{dm_1}{dt} = \vec{F}_{zew}.$$

Pozbędziemy się teraz indeksów 1 i 2 w nastpujący sposób. Interesuje nas ruch dużej masy m_2, która zmienia się w czasie z prędkością dm_1/dt. Zatem, wielkości m_2 i dm_1/dt dotyczą tej samej dużej masy m_2, którą nazwiemy masą m. Podobnie, prędkość v_2 jest prędkościa dużej masy - możemy opuścić indeks 2. Dostajemy zatem:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{u}\frac{dm}{dt} = \vec{F}_{zew}.$$

Siła zewnętrzna jest siłą działającą na cały układ, tzn. na masę m i dm, ale ze względnu na to, że $dm \lll m$ zaniedbujemy działanie siły zewnętrznej na dm.

Ruch układu o zmiennej masie

Otrzymujemy zatem:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{zew} + \vec{u}\frac{dm}{dt}.$$

Wyrażenie

$$\vec{u}\frac{dm}{dt}$$

nazywamy siłą odrzutu lub siłą ciągu.

Start rakiety

Zadanie Rakieta startuje z Ziemi (ruch w jednorodnym polu grawitacyjnym skierowanym przeciwnie do kierunku ruchu) wskutek odrzutu gazów wylatujących z jej dyszy ze stałą prędkością względną u i stałą ilością w jednostce czasu ϱ (mianem wielkości ϱ jest kg/s). Początkowa masa rakiety z paliwem wynosiła m_0. Znaleźć równanie ruchu rakiety oraz zależność jej prędkości v od czasu.

Start rakiety

Rozwiązanie Zakładamy, że rakieta porusza się w kierunku osi z: $\vec{v} = v\vec{e}_z$, pole grawitacyjne i prędkość względna skierowane są przeciwnie do osi z: $\vec{g} = -g\vec{e}_z$, $g > 0$, $\vec{u} = -u\vec{e}_z$, $u > 0$, mamy równanie ruchu rakiety w kierunku z:

$$m\frac{dv}{dt} = -u\frac{dm}{dt} - mg.$$

Do tego równania musimy wstawić zależność $m(t) = m_0 - \varrho t$ (bo $\frac{dm}{dt} = -\varrho$) i otrzymamy:

$$(m_0 - \varrho t)\frac{dv}{dt} = u\varrho - (m_0 - \varrho t)g.$$

Wycałkowanie z warunkiem początkowym $v(0) = 0$ daje

$$v(t) = -gt + u\ln\frac{m_0}{m_0 - \varrho t}.$$