Fizyka I (mechanika) 1100 - 1AF14
Fizyka I 1100 - 1B01

Wykład 7

Jerzy Łusakowski

Plan wykładu

Praca i energia

Siła a energia potencjalna

Dynamika ruchu obrotowego

Moment siły i moment pędu

Dynamika bryły sztywnej

Prędkość kątowa, moment pędu, moment bezwładności

Praca

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Mnożymy skalarnie obie strony przez $d\vec{r}$:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Prawą stronę tego równania oznaczamy przez dW i nazywamy pracą siły $\vec{F}$ przy przesunięciu $d\vec{r}$.

$$dW = F ds \cos(\sphericalangle(\vec{F}, d\vec{r})) = F_t ds$$

$$W_{A\to B} = \vec{F}(\vec{r}_1) \cdot d\vec{r}_1 + .. + \vec{F}(\vec{r}_N) \cdot d\vec{r}_N = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Praca wykonana przez siłę $\vec{F}$ może (ale nie musi) zależeć od wyboru drogi łączącej punkty A i B.

Praca sił prostopadłych do przesunięcia

Siły prostopadłe do przesunięcia:

- Siła dośrodkowa
- Siła Lorentza
- Siła grawitacji w pobliżu Ziemi dla przesunięć poziomych
- Siła reakcji dla więzów niezależnych od czasu.

Praca tych sił jest równa zero!

Moc

W zastosowaniach praktycznych interesuje nas często szybkość wykonywania pracy. Wprowadzamy zatem wielkość o nazwie *moc* zdefiniowaną jako:

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{dE_k}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right)$$

Jeśli znamy moc jako funkcję czasu, to pracę wykonaną w przedziale czasu od t_1 do t_2 możemy przedstawić w postaci:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P(t)dt.$$

Energia kinetyczna

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Mnożymy skalarnie obie strony przez $d\vec{r}$:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Lewa strona równania:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}dt = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$$

Energia kinetyczna i praca siły F

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Mnożymy skalarnie obie strony przez $d\vec{r}$:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Całkujemy wzdłuż drogi łączącej punkty A i B:

$$\int_A^B d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\frac{1}{2}mv^2(B) - \frac{1}{2}mv^2(A) = W_{A\to B}$$

Praca siły zewnętrznej jest równa zmianie energii kinetycznej ciała.

Prosty przykład - ruch w stałym polu grawitacyjnym

Masa m spoczywa na wysokości h nad Ziemią i w pewnej chwili zaczyna spadać.
Siła grawitacji wykonuje pracę:

$$W_{pole,\downarrow} = \int_h^0 m\vec{g} \cdot d\vec{r} =$$

$$= \int_h^0 (-mg)dz = -mg \int_h^0 dz = -mg(0-h) = mgh,$$

co jest równe zmianie energii kinetycznej (możemy ją wyznaczyć z równań ruchu):

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2(z=0) - \frac{1}{2}mv^2(z=h) = \frac{1}{2}mv^2(z=0)$$

Praca w stałym polu grawitacyjnym

Jaką pracę wykonamy podnosząc masę m na wysokość h? (Zakładamy, że robimy to tak wolno, że energię kinetyczną możemy zaniedbać.)

$$W_{my,\uparrow} = \int_0^h m\vec{g} \cdot d\vec{r} = \int_0^h (mg)dz = mgh$$

Czyli kosztem pracy siły zewnętrznej ciało zyskało energię potencjalną mgh.

A jaką pracę wykonała w tym czasie siła grawitacji?

$$W_{pole,\uparrow} = \int_0^h m\vec{g} \cdot d\vec{r} =$$

$$= \int_0^h (-mg)dz = -mg \int_0^h dz = -mg(h-0) = -mgh.$$

Siły zachowawcze i energia potencjalna

Zauważmy, że praca siły cieżkości przy przesunięciu masy m z punktu A do B nie zależy od drogi, którą ciało przebyło i zawsze jest równa:

$$W_{A\to B} = \int_A^B m\vec{g}\cdot d\vec{r}.$$

Ale wiemy, że taką właściwość ma całka z wyrażenia, które jest różniczką jakiejś funkcji, nazwijmy ją $-E_p$:

$$\int_A^B (-dE_p) = -(E_p(B) - E_p(A)).$$

Siły zachowawcze i energia potencjalna

Mamy więc dla siły grawitacji:

$$W_{A\to B} = -\int_A^B dE_p = -(E_p(B) - E_p(A)).$$

Równanie to przyjmiemy jako definicję pewnej klasy sił, które nazywamy *siłami zachowawczymi*: **dla sił zachowawczych praca zależy tylko od położenia początkowego i końcowego, nie zależy od pokonanej drogi**. Funkcję E_p nazywamy *energią potencjalną siły* $\vec{F}$.

W szczególności, jeśli A pokrywa się z B, to wyciągamy wniosek, że **praca siły zachowawczej po konturze zamkniętym jest równa zero**.

Definicje siły zachowawaczej

Z powyższych rozważań wynika, że siła $\vec{F}$ jest zachowawcza, jeśli

1. Praca siły $\vec{F}$ na drodze określonej wektorem $d\vec{r}$ jest równa różniczce pewnej funkcji, zwanej energią potencjalną, $\vec{F} \cdot d\vec{r} = -E_p$.
2. Praca siły zachowawaczej po konturze zamknietym jest równa zero.
3. Praca siły zachowawczej między punktami A i B zależy wyłącznie od położenia tych punktów, a nie od przebytej drogi.

Każde z tych stwierdzeń można przyjąć za definicję siły zachowawczej i wykazać równoważność przyjętej definicji z pozostałymi dwoma stwierdzeniami.

Poziom odniesienia dla energii potencjalnej

Energia potencjalna ciała w punkcie B jest określona przez pracę wykonaną przy przesunięciu ciała z punktu A do B:

$$E_p(B) - E_p(A) = -\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Jeśli zmienimy położenie punktu początkowego do A', to energia potencjalna w punkcie B będzie (w ogólności) inna:

$$E_p'(B) - E_p(A') = -\int_{A'}^B \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Widać, że

$$E_p'(B) = -\int_{A'}^A \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_p(B) + C,$$

gdzie C jest dane przez:

$$C = \int_A^{A'} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Zatem, energia potencjalna *jest określona z dokładnością do stałej*.

Siła centralna jest zachowawcza

Siła centralna to siłą, której wartość zależy wyłącznie od odległości od centrum siły, czyli:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(r)\frac{\vec{r}}{r}.$$

Jak już wiemy, dla siły zachowawczej praca nie zależy od drogi, a tylko od położenia punktu początkowego i końcowego. Zatem, dla siły centralnej:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F(r)\frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F(r)dr = \Phi(r_B) - \Phi(r_A),$$

gdzie $\Phi(r)$ jest całką funkcji $F(r)$: $F(r) = d\Phi/dr$.

Zachowanie energii mechanicznej dla sił zachowawczych

Widzieliśmy, że dla siły zachowawczej,

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \text{ oraz } dW = -dE_p.$$

Oznacza to, że

$$d(E_p + E_k) = 0,$$

czyli

$$E_p + E_k = const.$$

Suma energii kinetycznej i potencjalnej nosi nazwę *energii mechanicznej*.

Równanie to wyraża **zasadę zachowania energii mechanicznej w przypadku sił zachowawczych**.

Klocek wciągany na równię

Zadanie: klocek o masie m wciągany jest siłą F w górę równi o kącie nachylenia α. Współczynnik tarcia jest równy f. Rozważyć przemiany energii podczas przesunięcia klocka wzdłuż równi o d.

Rozwiązanie

$$T = -mgf\cos\alpha$$

$$a = \frac{F}{m} - g\sin\alpha - gf\cos\alpha$$

$$d = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \Rightarrow a = \frac{v^2 - v_0^2}{2d}$$

$$\frac{F}{m} - g\sin\alpha - gf\cos\alpha = \frac{v^2 - v_0^2}{2d}$$

$$Fd = mg\sin\alpha d + \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) + mgfd\cos\alpha$$

$$W_F = \Delta E_p + \Delta E_k + W_T$$

$$W_F = \Delta E_{mech} + \Delta E_{term}$$

Zasada zachowania energii

Zmiana całkowitej energii układu jest równa energii dostarczonej do układu lub od niego odebranej.

Do tej pory zmianę energii mogliśmy osiągnąć przez wykonanie nad układem pracy. Ale są i inne sposoby (np. ciepło).

Siła a energia potencjalna - przypadek jednowymiarowy

Jeśli siła zachowawcza ma tylko jedną składową $\vec{F} = F\vec{e}_x$, zaś współrzędne punktów A i B są równe a i b, to :

$$E_p(b) - E_p(a) = -\int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dr} = -\int_a^b F dx,$$

zatem

$$F(b) = -\frac{dE_p}{dx}|_{x=b}$$

Siła a energia potencjalna - przykłady

- Siła sprężysta.
  Energia potencjalna sprężyny ściśniętej o x jest równa:
  $$E_p = \frac{1}{2}kx^2.$$
  Stąd, siła sprężystości jest dana przez
  $$F_{spr} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx.$$
- Siła grawitacji przy powierzchni Ziemi.
  Energia grawitacyjna jest równa
  $$E_p = mgh.$$
  Siła grawitacji
  $$F = -\frac{d}{dh}mgh = -mg.$$

Przypadek trójwymiarowy - gradient

W ogólnym przypadku, energia potencjalna jest funkcją x, y, z: $E_p = E_p(x, y, z)$. Wtedy

$$\vec{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{e}_y - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{e}_z = -\vec{\nabla} E_p.$$

$$\frac{\partial E_p(x, y, z)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{E_p(x + \Delta x, y, z) - E_p(x, y, z)}{\Delta x}$$

Operator

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$$

nazywamy *gradientem*. Argumentem gradientu jest funkcja **skalarna**, zaś wynikiem - funkcja **wektorowa**.

Gradient skalara jest wektorem.

Gradient i powierzchnie ekwipotencjalne

Gradient funkcji skalarnej jest wektorem o następujących właściwościach:

- jest to wektor prostopadły do płaszczyzny ekwipotencjalnej $\Rightarrow$
  z tego wynika, że kierunek działania siły jest prostopadły do powierzchni ekwipotencjalnej: $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$.
- jest to wektor, który pokazuje kierunek najszybszego wzrostu funkcji E_p.

Proste przykłady prostopadłości siły i powierzchni ekwipotencjalnych:

- siła grawitacji w stałym polu grawitacyjnym
- siła grawitacji, elektrostatyczna $\sim r^{-2}$

Gradient i powierzchnie ekwipotencjalne

Dowód powyższych faktów jest następujący:

- Różniczka funkcji wielu zmiennych $E_p(x, y, z)$ wyraża się wzorem:

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x}dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}dy + \frac{\partial E_p}{\partial z}dz = \vec{\nabla} E_p \cdot d\vec{r}.$$

- Jeśli $d\vec{r}$ leży na powierzchni ekwipotencjalnej, to $dE_p = 0$, czyli $\vec{\nabla} E_p \cdot d\vec{r} = 0$, co oznacza, że $\vec{\nabla} E_p \perp d\vec{r}$, czyli $\vec{\nabla} E_p$ jest prostopadły do powierzchni ekwipotencjalnej
- Jeśli rozpatrzymy dwie bardzo bliskie siebie powierzchnie ekwipotencjalne odpowiadające wartościom E_p i $E_p + dE_p$, to najkrótszą linią łączącą te powierzchnie jest linia do nich prostopadła, czyli odpowiadająca kierunkowi gradientu. Oznacza to, że zmiana dE_p jest najszybsza w kierunku gradientu.

Dynamika ruchu obrotowego

Podstawowe pojęcia

- Oś obrotu: prosta, wokół której następuje obrót; podczas obrotu punkty położone na osi obrotu nie poruszają się.
- Kierunek zerowego położenia kątowego: ustalony kierunek prostopadły do osi obrotu, względem którego mierzymy wielkość obrotu.
- Linia odniesienia: linia, której położenie względem kierunku zerowego wyznacza wielkość obrotu.
- Położenie kątowe θ: kąt, jaki tworzy linia odniesienia z linią zerowego położenia kątowego.
  Położenie kątowe, wyrażone w radianach, określa wielkość obrotu.
- Przemieszczenie kątowe: różnica między końcowym a początkowym położeniem kątowym: $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$.

Prędkość kątowa

Prędkość kątową definiujemy podobnie, jak prędkość w ruchu postępowym:

Średnia prędkość kątowa:

$$\omega_{śr} = \frac{\theta(t_2) - \theta(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Chwilowa prędkość kątowa:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

Trzeba przyjąć konwencję dotyczącą znaku ω. Robimy to przez odniesienie do *prawoskrętnego* układu odniesienia: jeśli wersorem $\vec{e}_x$ kręcimy w kierunku $\vec{e}_y$, to związana z tym ruchem prędkość kątowa jest *dodatnia*. Prędkość kątowa jest wektorem, którego kierunek jest określony regułą śruby prawoskrętnej.

Przyspieszenie kątowe

Przyspieszenie kątowe definiujemy podobnie, jak przyspieszenie w ruchu postępowym:

Średnie przyspieszenie kątowe:

$$\epsilon_{śr} = \frac{\omega(t_2) - \omega(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Chwilowe przyspieszenie kątowe:

$$\epsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

Jest to tylko przyspieszenie związane ze stycznym przyspieszeniem liniowym!

Związek między zmiennymi kątowymi i liniowymi

Jeśli w czasie Δt linia odniesienia obróciła się o kąt $\Delta\theta$, to punkt odległy od osi obrotu o R przebył drogę:

$$\Delta s = \Delta\theta R.$$

Zakładając, że odległość R jest stała, prędkość prędkość liniowa punktu jest równa

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \omega R,$$

zaś przyspieszenie :

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \epsilon R.$$

Przykład - ruch wirowy obręczy

Rozpatrzmy mały fragment obręczy o promieniu R. Widzieliśmy, że w ruchu po okręgu $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$. Rozpisując na składowe, otrzymujemy:

$$\vec{\omega} \times \vec{R} = \vec{e}_x(z\omega_y - y\omega_z) - \vec{e}_y(z\omega_x - x\omega_z) + \vec{e}_z(y\omega_x - x\omega_y).$$

Stąd łatwo otrzymamy:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{R}) = \vec{\omega} \times \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{R} = \vec{\omega} \times \vec{v} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{R} = \vec{a}_n + \vec{a}_t.$$

Przyspieszenie dośrodkowe:

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{R}) - \vec{R}(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) = -\omega^2 \vec{R}.$$

Przyspieszenie styczne:

$$\vec{a}_t = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{R}.$$

Moment pędu i moment siły

Podobnie, jak pęd i siła są podstawowymi pojęciami koniecznymi do opisu ruchu postępowego, tak moment pędu i moment siły są konieczne do opisu ruchu obrotowego.

Definicja: momentem pędu nazywamy wielkość:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

Definicja: momentem siły nazywamy wielkość:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Zauważmy, że definicje te zależą od wyboru początku układu współrzędnych (w którym zaczepiony jest wektor $\vec{r}$).

Bryła sztywna

W zagadnieniach związanych z ruchem obrotowym bardzo często rozpatrujemy ruch obiektu złożonego z bardzo dużej liczby elementów (np. atomów), *których wzajemne odległości nie zmieniają się podczas ruchu* - *jest to bryła sztywna*.

Będziemy rozpatrywać ruch bryły sztywnej względem *osi obrotu*, która może przenikać przez bryłę albo być położona poza bryłą.

Jasne jest, że *rozkład masy bryły względem osi obrotu* ma istotne znaczenie dla dynamiki bryły.

Rozkład masy bryły sztywnej opisujemy za pomocą *tensora momentu bezwładności*.

Moment siły i obrót

Co ma wspólnego moment siły z obrotem?

Wyobraźmy sobie, że do punktu P bryły sztywnej przykładamy siłę $\vec{F}$ - bryła zacznie się poruszać.

A jeśli teraz unieruchomimy jakiś punkt Q?

Doświadczenie pokazuje, że ciało zacznie się obracać, chyba że kierunek działania siły pokrywa się z kierunkiem wyznaczonym przez prostą łączącą punkty Q i P.

Wyciągamy stąd wniosek, że

obrót jest wywołany momentem siły $\vec{F}$ względem punktu Q.

Statyka

Jeśli siły działające na punkt materialny równoważą się, to punkt ten się nie porusza.

Ale jeśli równoważace się siły działają na bryłę sztywną, to może się ona poruszać albo nie - zależy to od wypadkowego momentu siły.

Zatem, bryła sztywna pozostaje w spoczynku, jeśli:

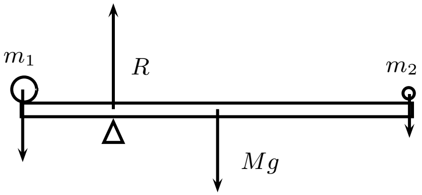
– wypadkowa siła działająca na bryłę jest równa zero

oraz

– wypadkowy moment siły działający na bryłę jest równy zero.

Statyka bryły sztywnej - przykład

Zadanie - dźwignia dwustronna. Jednorodna belka o masie M i długości L podparta jest w odległości $l < L/2$ od jednego z końcow, na którym leży masa m_1. Jaką masę m_2 należy położyć na drugim końcu belki aby układ był w równowadze? Jaka jest siła reakcji podpory?



Rozwiązanie
Równowaga sił: $-R + Mg + m_1 g + m_2 g = 0$.
Równowaga momentów sił względem punktu podparcia:
$m_1 g l - Mg(L/2 - l) - m_2 g(L - l) = 0$.
Stąd $m_2 = [lg(m_1 + M) - MgL/2]/(L - l)$, $R = -Mg - m_1 g - m_2 g$.

Równowaga

Bryła może się znajdować w stanie:
– równowagi trwałej
– równowagi obojętnej
– równowagi chwiejnej
Nie wystarczy rozwiązać równania, trzeba określić stabilność rozwiązania!

Druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0$$

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Zmiana momentu pędu w jednostce czasu jest równa momentowi działającej siły.

Energia kinetyczna i moment bezwładności

Przypuśćmy, że bryła sztywna złożona z N mas m_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ wiruje wokół pewnej osi z prędkością kątową ω.

Każda masa porusza się z prędkością $v_i = \omega r_{i,\perp}$.

Zatem, energia kinetyczna jest równa

$$E_k = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{N} m_i r_{i,\perp}^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Wielkość

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_{i,\perp}^2$$

nazywamy *momentem bezwładności*. W przypadku ciągłego rozkładu masy:

$$I = \int_V r_\perp^2 \, dm$$

Związek momentu pędu i prędkości kątowej

Rozważmy bryłę sztywną wirującą z prędkością kątową $\vec{\omega}$ wokół osi przechodzącej przez początek inercjalnego układu współrzędnych $\mathcal{O}$ (bardzo często wygodnie jest umieścić $\mathcal{O}$ w środku masy).

i-ty punkt bryły, o masie Δm_i, znajdujący się w położeniu $\vec{r}_i$ od $\mathcal{O}$ porusza się po okręgu i ma prędkość styczną do toru równą $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$.

Całkowity moment pędu bryły jest równy:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \Delta m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

czyli

$$\vec{L} = \sum_i \Delta m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

Ruch wirowy obręczy - przypadki szczególne

Obręcz o promieniu R i masie M może wirować wokół osi przechodzącej przez jej środek i nachylonej do płaszczyzny obręczy pod kątem φ.

W przypadku $\varphi = \frac{\pi}{2}$, mamy:

$$\vec{L} = \sum_i \Delta m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_i \Delta m_i \omega r_i^2 \vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = MR^2 \vec{\omega} = I_\perp \vec{\omega}.$$

W przypadku $\varphi = 0$, mamy:

$$\vec{L} = \sum_i \Delta m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \frac{1}{2} MR^2 \vec{\omega} = I_\parallel \vec{\omega}.$$

Oś obrotu prostopadła do płaszczyzny obręczy - obliczenia

Wybieramy oś z równoległą do $\vec{\omega}$, a osie x i y - w płaszczyźnie obręczy. Dla każdego niewielkiego elementu masy obręczy mamy:

$$\vec{\omega} \times \vec{r}_i = \omega R \vec{e}_\varphi,$$

$$\vec{r}_i = R \vec{e}_r,$$

czyli

$$\vec{L} = \sum \Delta m_i R^2 \omega \vec{e}_z = M R^2 \omega \vec{e}_z,$$

$$\vec{L} = I_\perp \vec{\omega}.$$

Oś obrotu w płaszczyźnie obręczy - obliczenia

Środek układu współrzędnych umieszczamy w środku tarczy. Wektor $\vec{\omega}$ kierujemy wzdłuż osi z i zakładamy, że w pewnej chwili obręcz znajduje się w płaszczyźnie yz. Wtedy dla elementu masy obręczy $dm = \frac{M}{2\pi} d\alpha$ (kąt α liczymy od osi y w kierunku osi z) mamy:

$$\vec{\omega} \times \vec{r}_i = -\omega R \cos\alpha \vec{e}_x,$$

$$\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \omega R^2 \sin\alpha \cos\alpha \vec{e}_y + \omega R^2 \cos^2\alpha \vec{e}_z,$$

$$\vec{L} = \vec{e}_y \omega \frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} R^2 \sin\alpha \cos\alpha d\alpha + \vec{e}_z \omega \frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2\alpha d\alpha =$$

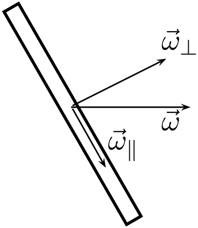
$$= \frac{1}{2} M R^2 \omega = I_{||} \omega.$$

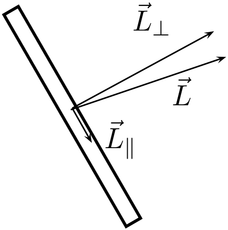
Ruch wirowy obręczy - przypadek ogólny

Jeśli wektor prędkości kątowej jest ustawiony pod kątem ostrym do płaszczyzny tarczy, to wektor momentu pędu nie jest równoległy do wektora prędkości kątowej:

$$\vec{L} = \vec{L}_{\perp} + \vec{L}_{||} = I_{\perp}\vec{\omega}_{\perp} + I_{||}\vec{\omega}_{||},$$

gdyż $I_{\perp} \neq I_{||}$.





Przypadek ogólny - obliczenia

Oś obrotu jest nachylona pod kątem φ do płaszczyzny tarczy.
Prędkość kątową możemy rozłożyć na dwie składowe:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\perp + \vec{\omega}_{||}, \quad \text{czyli} \quad \tan\varphi = \frac{\omega_\perp}{\omega_{||}}$$

Moment pędu

$$\vec{L} = \vec{L}_\perp + \vec{L}_{||} = I_\perp \vec{\omega}_\perp + I_{||}\vec{\omega}_{||} = MR^2(\vec{\omega}_\perp + \frac{1}{2}\vec{\omega}_{||})$$

jest nachylony do płaszczyzny obręczy pod kątem ψ takim, że

$$\tan\psi = \frac{J_\perp}{J_{||}} = 2\frac{\omega_\perp}{\omega_{||}} = 2\tan\varphi.$$

W ogólności, moment pędu nie jest równoległy do prędkości kątowej!!!
Dzieje się tak w przypadku, gdy oś obrotu nie jest osią symetrii bryły.

Moment pędu wirującej obręczy

Z punktu widzenia układu układu inercjalnego, w którym rozpatrujemy ruch obręczy, wektor momentu pędu $\vec{L}$ obraca się wokół stałego wektora prędkości kątowej $\vec{\omega}$ (założyliśmy, iż oś obrotu, czyli $\vec{\omega}$, ma stały kierunek).

Jeśli $\vec{L}$ zmienia się, to znaczy, że działa moment siły:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{inerc}.$$

Moment siły pochodzi od sił reakcji w łożyskach utrzymujących oś obrotu w stałym położeniu.

W układzie *nieinercjalnym* związanym sztywno z tarczą moment pędu jest stały, gdyż moment siły reakcji łożysk jest kompensowany przez moment sił bezwładności.

$$\vec{M}_{inerc} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}'.$$

Opis obracającej się bryły sztywnej - układ inercjalny i nieinercjalny

Logiczne jest, że moment bezwładności należy wyznaczać w układzie *sztywno* związanym z bryłą, bo w ogólności, podczas ruchu, *rozkład masy* bryły względem *inercjalnego* układu odniesienia się zmienia. Musimy jednak pamiętać, że w przypadku ruchu obrotowego, układ sztywno związany z bryłą jest układem *nieinercjalnym*. Rozpatrzymy zatem wirującą bryłę sztywną i dwa układy odniesienia: inercjalny $\mathcal{U}$ i związany sztywno z bryłą $\mathcal{U}'$. Zakładamy, że początki układów $\mathcal{O}$ i $\mathcal{O}'$ się pokrywają i znajdują się w środku masy bryły.

Moment pędu bryły w układzie nieinercjalnym

Wektor momentu pędu $\vec{L}$ możemy zapisać we współrzędnych układu $\mathcal{U}$ i $\mathcal{U}'$:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_i m_i \vec{r'}_i \times (\vec{\omega'} \times \vec{r'}_i)$$

$$\vec{r}_i = \vec{r'}_i = x'_i \vec{e'}_x + y'_i \vec{e'}_y + z'_i \vec{e'}_z, \qquad \vec{\omega} = \vec{\omega'} = \omega'_{x'} \vec{e'}_{x'} + \omega'_{y'} \vec{e'}_{y'} + \omega'_{z'} \vec{e'}_{z'}$$

Korzystamy z faktu, że

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$\vec{r'}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r'}_i) = \vec{\omega} {r'}_i^2 - \vec{r'}_i (\vec{r'}_i \vec{\omega})$$

Tensor momentu bezwładności

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_i m_i \vec{r'}_i \times (\vec{\omega'} \times \vec{r'}_i)$$

$$= \vec{e'}_{x'} \left[\sum_i m_i [r_i'^2 \omega_{x'} - x_i'(x_i'\omega_{x'} + y_i'\omega_{y'} + z_i'\omega_{z'})] \right] +$$

$$+ \vec{e'}_{y'} \left[\sum_i m_i [r_i'^2 \omega_{y'} - y_i'(x_i'\omega_{x'} + y_i'\omega_{y'} + z_i'\omega_{z'})] \right] +$$

$$+ \vec{e'}_{z'} \left[\sum_i m_i [r_i'^2 \omega_{z'} - z_i'(x_i'\omega_{x'} + y_i'\omega_{y'} + z_i'\omega_{z'})] \right]$$

$$L_{x'} = \omega_{x'} \sum_i m_i (r_i'^2 - x_i'^2) - \omega_{y'} \sum_i m_i x_i' y_i' - \omega_{z'} \sum_i m_i x_i' z_i'$$

$$L_{y'} = -\omega_{x'} \sum_i m_i x_i' y_i' + \omega_{y'} \sum_i m_i (r_i'^2 - y_i'^2) - \omega_{z'} \sum_i m_i y_i' z_i'$$

$$L_{x'} = -\omega_{x'} \sum m_i x_i' z_i' - \omega_{y'} \sum m_i x_i' y_i' + \omega_{z'} \sum m_i (r_i'^2 - z_i'^2)$$

Tensor momentu bezwładności

$$\begin{bmatrix} L'_x \\ L'_y \\ L'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{x'x'} & I_{x'y'} & I_{x'z'} \\ I_{y'x'} & I_{y'y'} & I_{y'z'} \\ I_{z'x'} & I_{z'y'} & I_{z'z'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{x'} \\ \omega_{y'} \\ \omega_{z'} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I_{x'x'} & I_{x'y'} & I_{x'z'} \\ I_{x'y'} & I_{y'y'} & I_{y'z'} \\ I_{x'z'} & I_{y'z'} & I_{z'z'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{x'} \\ \omega_{y'} \\ \omega_{z'} \end{bmatrix}$$

$$I_{x'x'} = \sum_i m_i (y_i'^2 + z_i'^2), \quad I_{y'y'} = \sum_i m_i (x_i'^2 + z_i'^2), \quad I_{z'z'} = \sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2)$$

$$I_{x'y'} = I_{y'x'} = -\sum_i m_i x'_i y'_i, \quad I_{x'z'} = I_{z'x'} = -\sum_i m_i x'_i z'_i,$$

$$I_{y'z'} = I_{z'y'} = -\sum_i m_i y'_i z'_i$$

Tensor momentu bezwładnosci

$\hat{I}$ - tensor momentu bezwładności.

Tensor momentu bezwładności wiąże moment pędu i prędkość kątową:

$$\vec{L} = \hat{I}\omega.$$

$\hat{I}$ jest macierzą symetryczną (nawet w najbardziej ogólnym przypadku).

Elementy diagonalne są równe momentom bezwładności względem osi x', y' i z'. Elementy pozadiagonalne nazywają się momentami zboczenia lub dewiacji.

Postać tej macierzy (czyli wartości jej poszczególnych elementów) zależą od wyboru kierunków osi x', y', z'.

Tensor momentu bezwładności

W przypadku macierzy symetrycznej, zawsze można tak wybrać kierunki osi układu współrzędnych (x', y', z'), aby wyrazy pozadiagonalne były równe zero.

W takim układzie współrzędnych mamy:

$$\begin{pmatrix} L''_x \\ L''_y \\ L''_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I''_x & 0 & 0 \\ 0 & I''_y & 0 \\ 0 & 0 & I''_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{x''} \\ \omega_{y''} \\ \omega_{z''} \end{pmatrix}$$

Kierunki te nazywają się *kierunkami osi głównych*.
W przypadku "standardowych" brył pokrywają się one z osiami symetrii.