Fizyka I (mechanika) 1100 - 1AF14
Fizyka I 1100 - 1B01

Wykład 8

Jerzy Łusakowski

Plan wykładu

- Dynamika bryły sztywnej
- Prędkość kątowa, moment pędu, moment bezwładności
- Żyroskopy, bąki, etc.
- Twierdzenie Steinera
- Praca momentu sił
- Nieobowiązkowo - równania Eulera

Druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0$$

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Zmiana momentu pędu w jednostce czasu jest równa momentowi działającej siły.

Zasada zachowania momentu pędu

Z postaci drugiej zasady dynamiki

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

wynika zasada zachowania momentu pędu:

W układzie inercjalnym, jeśli na ciało nie działa moment siły, wówczas moment pędu ciała jest stały.

Podkreślenie "w układzie inercjalnym" jest istotne. W układzie nieinercjalnym, równanie ruchu momentu pędu ma postać

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}' = \vec{M}$$

i stałość momentu pędu $\vec{L}'$ zapewniona jest przez działający moment sił bezwładności $\vec{\omega} \times \vec{L}'$.

Związek momentu pędu i prędkości kątowej

Rozważmy bryłę sztywną wirującą z prędkością kątową $\vec{\omega}$ wokół osi przechodzącej przez początek inercjalnego układu współrzędnych $\mathcal{O}$ (bardzo często wygodnie jest umieścić $\mathcal{O}$ w środku masy).

i-ty punkt bryły, o masie Δm_i, znajdujący się w położeniu $\vec{r}_i$ od $\mathcal{O}$ porusza się po okręgu i ma prędkość styczną do toru równą $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$.

Całkowity moment pędu bryły jest równy:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \Delta m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

czyli

$$\vec{L} = \sum_i \Delta m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

Ruch wirowy obręczy - przypadki szczególne

Obręcz o promieniu R i masie M może wirować wokół osi przechodzącej przez jej środek i nachylonej do płaszczyzny obręczy pod kątem φ.

W przypadku $\varphi = \frac{\pi}{2}$, mamy:

$$\vec{L} = \sum_i \Delta m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_i \Delta m_i \omega r_i^2 \vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = MR^2 \vec{\omega} = I_\perp \vec{\omega}.$$

W przypadku $\varphi = 0$, mamy:

$$\vec{L} = \sum_i \Delta m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \frac{1}{2} MR^2 \vec{\omega} = I_\parallel \vec{\omega}.$$

Oś obrotu prostopadła do płaszczyzny obręczy - obliczenia

Wybieramy oś z równoległą do $\vec{\omega}$, a osie x i y - w płaszczyźnie obręczy. Dla każdego niewielkiego elementu masy obręczy mamy:

$$\vec{\omega} \times \vec{r}_i = \omega R \vec{e}_\varphi,$$

$$\vec{r}_i = R\vec{e}_r,$$

czyli

$$\vec{L} = \sum \Delta m_i R^2 \omega \vec{e}_z = M R^2 \omega \vec{e}_z,$$

$$\vec{L} = I_\perp \vec{\omega}.$$

Oś obrotu w płaszczyźnie obręczy - obliczenia

Środek układu współrzędnych umieszczamy w środku obręczy. Wektor $\vec{\omega}$ kierujemy wzdłuż osi z i zakładamy, że w pewnej chwili obręcz znajduje się w płaszczyźnie yz. Wtedy dla elementu masy obręczy $dm = \frac{M}{2\pi} d\alpha$ (kąt α liczymy od osi y w kierunku osi z) mamy:

$$\vec{\omega} \times \vec{r_i} = -\omega R \cos \alpha \vec{e}_x,$$

$$\vec{r_i} \times (\vec{\omega} \times \vec{r_i}) = \omega R^2 \sin \alpha \cos \alpha \vec{e}_y + \omega R^2 \cos^2 \alpha \vec{e}_z,$$

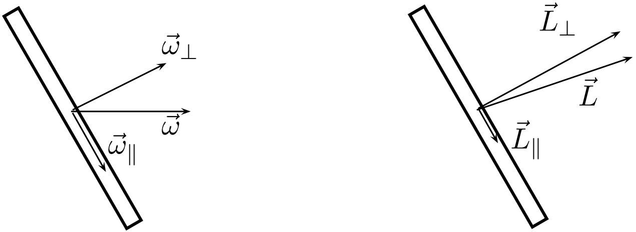
$$\vec{L} = \frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega R^2 \sin \alpha \cos \alpha d\alpha + \frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} M R^2 \omega = I_{||} \omega.$$

Ruch wirowy obręczy - przypadek ogólny

Jeśli wektor prędkości kątowej jest ustawiony pod kątem ostrym do płaszczyzny obręczy, to wektor momentu pędu nie jest równoległy do wektora prędkości kątowej:

$$\vec{L} = \vec{L}_\perp + \vec{L}_{||} = I_\perp \vec{\omega}_\perp + I_{||} \vec{\omega}_{||},$$

gdyż $I_\perp \neq I_{||}$.



Przypadek ogólny - obliczenia

Oś obrotu jest nachylona pod kątem φ do płaszczyzny obręczy. Prędkość kątową możemy rozłożyć na dwie składowe:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\perp + \vec{\omega}_{||}, \quad \text{czyli} \quad \tan\varphi = \frac{\omega_\perp}{\omega_{||}}$$

Moment pędu

$$\vec{L} = \vec{L}_\perp + \vec{L}_{||} = I_\perp \vec{\omega}_\perp + I_{||}\vec{\omega}_{||} = MR^2(\vec{\omega}_\perp + \frac{1}{2}\vec{\omega}_{||})$$

jest nachylony do płaszczyzny obręczy pod kątem ψ takim, że

$$\tan\psi = \frac{J_\perp}{J_{||}} = 2\frac{\omega_\perp}{\omega_{||}} = 2\tan\varphi.$$

W ogólności, moment pędu nie jest równoległy do prędkości kątowej!!!
Dzieje się tak w przypadku, gdy oś obrotu nie jest osią symetrii bryły.

Układ inercjalny $\mathcal{U}$ i sztywno związany z wirującą obręczą układ $\mathcal{U}'$.

Ustalmy położenie układu inercjalnego $\mathcal{U}$ w taki sposób, że jego środek znajduje się w środku obręczy. Układ $\mathcal{U}'$, sztywno związany z obręczą, ma środek w środku obręczy a oś z' jest prostopadła do płaszczyzny obręczy.

a) Wirowanie względem osi z, z' - wektor prędkości kątowej $\vec{\omega}$ jest stały w obu układach odniesienia i ma jednakowe współrzędne: $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z = \omega\vec{e}_{z'}$.

b) Wirowanie wokół średnicy. Jeśli w układzie $\mathcal{U}$ kierunkiem $\vec{\omega}$ jest kierunek x, a oś x' tworzy z osią x kąt α, to $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_x = \omega(\cos\alpha\vec{e}_{x'} - \sin\alpha\vec{e}_{y'})$.

c) Wirowanie wokół osi nachylonej pod kątem φ do płaszczyzny tarczy. W takim przypadku wersory $\vec{e}_{x'}$, $\vec{e}_{y'}$ oraz $\vec{e}_{z'}$ tworzą pewne kąty α, β i γ z wektorem $\vec{\omega}$, stałe podczas wirowania, czyli $\vec{\omega} = \omega(\cos\varphi\vec{e}_x + \sin\varphi\vec{e}_y) = \omega(\cos\alpha\vec{e}_{x'} + \cos\beta\vec{e}_{y'} + \cos\gamma\vec{e}_{z'})$.

Moment pędu wirującej obręczy

Widzimy zatem, że w układzie nieinercjalnym $\mathcal{U}'$ sztywno związanym z obręczą, wektor prędkości kątowej jest stały (o ile jest stały także w układzie inercjalnym $\mathcal{U}$) . Zatem, wektor momentu pędu

$$\vec{L} = \vec{L}_{\perp} + \vec{L}_{||} = I_{\perp}\vec{\omega}_{\perp} + I_{||}\vec{\omega}_{||} = MR^2(\vec{\omega}_{\perp} + \frac{1}{2}\vec{\omega}_{||})$$

także jest stały w układzie $\mathcal{U}'$.
Z punktu widzenia układu układu inercjalnego, wektor momentu pędu $\vec{L}$ obraca się wokół stałego wektora prędkości kątowej $\vec{\omega}$ z powodu działania momentu sił w łożysku utrzymujących oś obrotu w stałym położeniu.
W układzie *nieinercjalnym* moment pędu jest stały, gdyż moment siły reakcji łożysk jest kompensowany przez moment sił bezwładności:

$$\vec{M}_{inerc} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}'.$$

Opis obracającej się bryły sztywnej - układ inercjalny i nieinercjalny

Logiczne jest, że moment bezwładności należy wyznaczać w układzie *sztywno* związanym z bryłą, bo w ogólności, podczas ruchu, *rozkład masy* bryły względem *inercjalnego* układu odniesienia się zmienia. Musimy jednak pamiętać, że w przypadku ruchu obrotowego, układ sztywno związany z bryłą jest układem *nieinercjalnym*. Rozpatrzymy zatem wirującą bryłę sztywną i dwa układy odniesienia: inercjalny $\mathcal{U}$ i związany sztywno z bryłą $\mathcal{U}'$. Zakładamy, że początki układów $\mathcal{O}$ i $\mathcal{O}'$ się pokrywają i znajdują się w środku masy bryły.

Moment pędu bryły w układzie nieinercjalnym

Wektor momentu pędu $\vec{L}$ możemy zapisać we współrzędnych układu $\mathcal{U}$ i $\mathcal{U}'$:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_i m_i \vec{r'}_i \times (\vec{\omega'} \times \vec{r'}_i)$$

$$\vec{r}_i = \vec{r'}_i = x_i' \vec{e'}_x + y_i' \vec{e'}_y + z_i' \vec{e'}_z, \qquad \vec{\omega} = \vec{\omega'} = \omega_{x'}' \vec{e'}_{x'} + \omega_{y'}' \vec{e'}_{y'} + \omega_{z'}' \vec{e'}_{z'}$$

Korzystamy z faktu, że

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$\vec{r'}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r'}_i) = \vec{\omega} r'^2_i - \vec{r'}_i (\vec{r'}_i \vec{\omega})$$

Tensor momentu bezwładności

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_i m_i \vec{r'}_i \times (\vec{\omega'} \times \vec{r'}_i)$$

$$= \vec{e'}_{x'} \left[\sum_i m_i [r_i'^2 \omega_{x'} - x_i'(x_i'\omega_{x'} + y_i'\omega_{y'} + z_i'\omega_{z'})] \right] +$$

$$+\vec{e'}_{y'} \left[\sum_i m_i [r_i'^2 \omega_{y'} - y_i'(x_i'\omega_{x'} + y_i'\omega_{y'} + z_i'\omega_{z'})] \right] +$$

$$+\vec{e'}_{z'} \left[\sum_i m_i [r_i'^2 \omega_{z'} - z_i'(x_i'\omega_{x'} + y_i'\omega_{y'} + z_i'\omega_{z'})] \right]$$

$$L_{x'} = \omega_{x'} \sum_i m_i (r_i'^2 - x_i'^2) - \omega_{y'} \sum_i m_i x_i' y_i' - \omega_{z'} \sum_i m_i x_i' z_i'$$

$$L_{y'} = -\omega_{x'} \sum_i m_i x_i' y_i' + \omega_{y'} \sum_i m_i (r_i'^2 - y_i'^2) - \omega_{z'} \sum_i m_i y_i' z_i'$$

$$L_{x'} = -\omega_{x'} \sum m_i x_i' z_i' - \omega_{y'} \sum m_i x_i' y_i' + \omega_{z'} \sum m_i (r_i'^2 - z_i'^2)$$

Tensor momentu bezwładności

$$\begin{bmatrix} L'_x \\ L'_y \\ L'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{x'x'} & I_{x'y'} & I_{x'z'} \\ I_{y'x'} & I_{y'y'} & I_{y'z'} \\ I_{z'x'} & I_{z'y'} & I_{z'z'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{x'} \\ \omega_{y'} \\ \omega_{z'} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I_{x'x'} & I_{x'y'} & I_{x'z'} \\ I_{x'y'} & I_{y'y'} & I_{y'z'} \\ I_{x'z'} & I_{y'z'} & I_{z'z'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{x'} \\ \omega_{y'} \\ \omega_{z'} \end{bmatrix}$$

$$I_{x'x'} = \sum_i m_i(y_i'^2 + z_i'^2), \quad I_{y'y'} = \sum_i m_i(x_i'^2 + z_i'^2), \quad I_{z'z'} = \sum_i m_i(x_i'^2 + y_i'^2)$$

$$I_{x'y'} = I_{y'x'} = -\sum_i m_i x'_i y'_i, \quad I_{x'z'} = I_{z'x'} = -\sum_i m_i x'_i z'_i,$$

$$I_{y'z'} = I_{z'y'} = -\sum_i m_i y'_i z'_i$$

Tensor momentu bezwładnosci

$\hat{I}$ - tensor momentu bezwładności.

Tensor momentu bezwładności wiąże moment pędu i prędkość kątową:

$$\vec{L} = \hat{I}\omega.$$

$\hat{I}$ jest macierzą symetryczną (nawet w najbardziej ogólnym przypadku).

Elementy diagonalne są równe momentom bezwładności względem osi x', y' i z'. Elementy pozadiagonalne nazywają się momentami zboczenia lub dewiacji.

Postać tej macierzy (czyli wartości jej poszczególnych elementów) zależą od wyboru kierunków osi x', y', z'.

Tensor momentu bezwładności

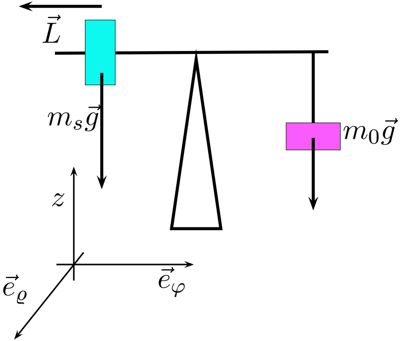
W przypadku macierzy symetrycznej, zawsze można tak wybrać kierunki osi układu współrzędnych (x', y', z'), aby wyrazy pozadiagonalne były równe zero.

W takim układzie współrzędnych mamy:

$$\begin{pmatrix} L''_x \\ L''_y \\ L''_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I''_x & 0 & 0 \\ 0 & I''_y & 0 \\ 0 & 0 & I''_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{x''} \\ \omega_{y''} \\ \omega_{z''} \end{pmatrix}$$

Kierunki te nazywają się *kierunkami osi głównych*.
W przypadku "standardowych" brył pokrywają się one z osiami symetrii.

Niezrównoważony żyroskop

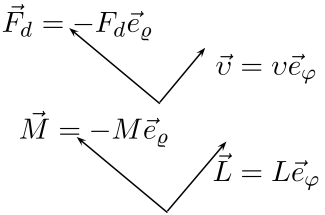


Żyroskop nie jest zrównoważony, gdy momenty siły ciężkości wirującego silnika o masie m_s i masy m_0 względem punktu podparcia dźwigni dwustronnej nie są sobie równe. Pojawia się wówczas wypadkowy moment siły $\vec{M}$ obracający układ wokół osi z.

Precesja żyroskopu - opis w układzie inercjalnym

W układzie inercjalnym mamy równanie ruchu: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$, czyli przy odpowiednio ustawionych osiach układu biegunowego: $\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\frac{M}{L}\vec{e}_\varrho$. $\vec{M}$ jest prostopadły do $\vec{L}$, zatem będzie powodować obrót $\vec{L}$ wokół osi z. Aby znaleźć ruch wektora $\vec{L}$ zauważmy analogię z ruchem ze stałą wartością prędkości wokół okręgu. Równanie ruchu ma postać: $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_d/m$, czyli $\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\frac{F_d}{mv}\vec{e}_\varrho$. Współczynnik $\frac{F_d}{mv}$ jest prędkością kątową, z jaką obraca się wektor $\vec{v}$. Mamy przecież w układzie biegunowym $\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varrho$. Przez analogię - częstością precesji wektora $\vec{L}$ jest $\omega_p = M/L$.

Analogia z ruchem po okręgu



Zauważmy, że ta analogia *nie wymaga* aby wektor $\vec{L}$ był związany z poruszającym się po okręgu punktem! Ważna jest tylko *zmiana kierunku* wektora $\vec{L}$.

Precesja żyroskopu - opis w układzie nieinercjalnym

Układ nieinercjalny to układ sztywno związany z obracającą się dźwignią - nie należy go wiązać z obracającym się wirnikiem żyroskopu! Równanie ruchu dla momentu pędu w tym układzie otrzymujemy z równania $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ transformując pochodną do układu nieinercjalnego:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}'}{dt} + \vec{\omega_p} \times \vec{L}' = \vec{M}.$$

W układzie obracającym się wraz z dźwignią moment pędu jest stały co do kierunku i wartości (w układzie inercjalnym - tylko co do wartości). Zatem,

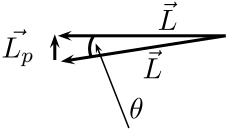
$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = 0 \qquad \text{czyli} \qquad \vec{\omega_p} \times \vec{L}' = \vec{M}.$$

Skąd, jak poprzednio,

$$\omega_p = \frac{M}{L}.$$

Przechylenie osi żyroskopu

Jeśli żyroskop (z kręcącym się wirnikiem, moment pędu L) jest początkowo zrównoważony (dźwignia jest pozioma), a następnie zwiększymy masę m_0 od Δm, to oprócz precesji z prędkością $\omega_p = M/L$ obserwujemy pochylenie dźwigni. Wynika to z *zasady zachowania momentu pędu*: początkowo moment pędu układu był równy $\vec{L}$, natomiast, gdy dźwignia się obraca, układ ma dodatkowy moment pędu $\vec{L}_p$ związany z precesją. Zatem, dla zachowania momentu pędu, dźwignia musi się pochylić. Kąt pochylenia θ jest równy w przybliżeniu L_p/L.



Energia kinetyczna ruchu obrotowego

$$E_k = \frac{1}{2}\sum_i \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i \Delta m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2$$

Korzystamy z tożsamości wektorowej:

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$$

skąd mamy $(\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 = \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i'))$.

$$E_k = \frac{1}{2}\vec{\omega}\sum_i \Delta m_i [r_i'^2 \vec{\omega} - \vec{r}_i'(\vec{r'}_i \cdot \vec{\omega})] = \frac{1}{2}\vec{\omega}\hat{I}\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{L}.$$

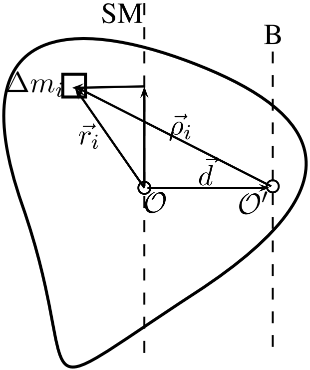
$$E_k = \frac{1}{2}(\omega_x^2 I_{xx} + \omega_y^2 I_{yy} + \omega_z^2 I_{zz} + 2\omega_x\omega_y I_{xy} + 2\omega_x\omega_z I_{xz} + 2\omega_x\omega_z I_{xz}).$$

W przypadku układu zgodnego z osiami głównymi:

$$E_k = \frac{1}{2}(\omega_x^2 I_{xx} + \omega_y^2 I_{yy} + \omega_z^2 I_{zz}).$$

Twierdzenie Steinera

Niech będzie dana oś SM przechodząca przez środek masy bryły sztywnej znajdujący się w punkcie $\mathcal{O}$ oraz równoległa do niej i oddalona o d oś B.



Twierdzenie Steinera

Jeśli moment bezwładności bryły sztywnej o masie M względem osi SM przechodzącej przez środek masy jest równy I_{SM}, to moment bezwładności względem osi B, równoległej do SM i oddalonej o d jest równy $I_B = I_{SM} + Md^2$.

UWAGA: oś B nie musi przechodzić przez bryłę sztywną.
Dowód:

$$I_B = \sum \Delta m_i \rho_{i,\perp}^2 = \sum \Delta m_i (\vec{r}_{i,\perp} - \vec{d})^2 =$$

$$= \sum \Delta m_i r_{i,\perp}^2 + Md^2 - 2\vec{d} \cdot \sum \Delta m_i \vec{r}_{i,\perp} =$$

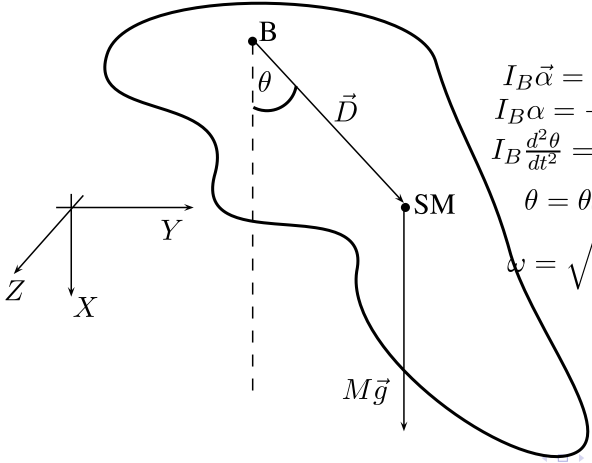
$$= I_{SM} + Md^2.$$

$$\vec{d} \cdot \sum \Delta m_i \vec{r}_{i,\perp} = \vec{d} \cdot \sum \Delta m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_{i,\parallel}) = 0 + 0 = 0.$$

Pierwszy składnik sumy jest równy zero, gdyż $\sum \Delta m_i \vec{r}_i / M$ jest położeniem środka masy względem środka masy. Drugi składnik jest równy zero, gdyż jest iloczynem skalarnym wektorów wzajemnie prostopadłych.

Wahadło fizyczne

Wahadło fizyczne waha się wokół osi, która *nie przechodzi* przez środek masy!



$$I_B\vec{\alpha} = \vec{D} \times M\vec{g}$$
$$I_B\alpha = -MgD\sin\theta$$
$$I_B\frac{d^2\theta}{dt^2} = -MgD\theta$$
$$\theta = \theta_0\cos(\omega t + \phi)$$
$$\omega = \sqrt{\frac{MgD}{I_B}} = \sqrt{\frac{MgD}{I_{SM}+MD^2}}$$

Wahadło zredukowane

Wahadło zredukowane jest to wahadło matematyczne, którego okres drgań jest taki, jak okres drgań danego wahadła fizycznego.

Wahadło fizyczne:

$$\omega = \sqrt{\frac{MgD}{I_{SM} + MD^2}}.$$

Wahadło matematyczne:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}.$$

Stąd

$$L = \frac{I_{SM} + MD^2}{MD} = D + \frac{I_{SM}}{MD} > D.$$

Praca momentu siły przy obrocie bryły wokół ustalonej osi

W przypadku ruchu wokół ustalonej osi, wszystkie punkty bryły poruszają się po okręgach. Pracę wykonuje tylko siła styczna do toru - okręgu (F_s), bo składowa normalna jest prostopadła do przesunięcia. Załóżmy, że siła jest przyłożona tylko w jednym punkcie bryły (np. na obwodzie walca), w odległości r od osi obrotu.

W czasie dt bryła obróciła się o $d\theta$. Punkt odległy o r od osi obrotu przybył drogę $ds = d\theta r$ z prędkością $v = \frac{ds}{dt} = \omega r$. W ogólności, siła F_s może zależeć od kąta: $F_s = F_s(\theta)$.

Praca wykonana przez siłę zewnętrzną jest równa $dW = d\theta r F_s(\theta) = M(\theta) d\theta$, czyli

$$W_{\theta_1 \to \theta_2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M(\theta) d\theta.$$

Równania Eulera

Równanie ruchu obrotowego w układzie inercjalnym $\mathcal{U}$ ma postać:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Przypuśćmy, że wybraliśmy osie układu $\mathcal{U}'$ zgodne z osiami głównymi bryły, a początek $\mathcal{O}'$ umieścilismy w środku masy bryły. W układzie $\mathcal{U}'$ równanie ruchu obrotowego ma postać:

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}' = \vec{M}$$

W tym równaniu wszystkie wektory możemy przedstawić w postaci składowych na osiach układu $\mathcal{U}'$.

Równania Eulera

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}' = \vec{M}$$

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_{x'} \\ \omega_{y'} \\ \omega_{z'} \end{bmatrix}, \qquad \vec{L}' = \hat{I}\vec{\omega} = I_{x'}\omega_{x'}\vec{e}_{x'} + I_{y'}\omega_{y'}\vec{e}_{y'} + I_{z'}\omega_{z'}\vec{e}_{z'}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{L}' = \begin{vmatrix} \vec{e}_{x'} & \vec{e}_{y'} & \vec{e}_{z'} \\ \omega_{x'} & \omega_{y'} & \omega_{z'} \\ I_{x'}\omega_{x'} & I_{y'}\omega_{y'} & I_{z'}\omega_{z'} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} (I_{z'} - I_{y'})\omega_{y'}\omega_{z'}\vec{e}_{x'} + \\ (I_{x'} - I_{z'})\omega_{x'}\omega_{z'}\vec{e}_{y'} + \\ (I_{y'} - I_{x'})\omega_{x'}\omega_{y'}\vec{e}_{z'} \end{array}$$

$$\begin{cases} I_{x'}\frac{d\omega_{x'}}{dt} + (I_{z'} - I_{y'})\omega_{y'}\omega_{z'} &= M_{x'} \\ I_{y'}\frac{d\omega_{y'}}{dt} + (I_{x'} - I_{z'})\omega_{x'}\omega_{z'} &= M_{y'} \\ I_{z'}\frac{d\omega_{z'}}{dt} + (I_{y'} - I_{x'})\omega_{x'}\omega_{y'} &= M_{z'} \end{cases}$$

Zazwyczaj momenty bezwładności oraz momenty sił są znane, a szukamy $\vec{\omega}$.

Precesja prędkości kątowej swobodnej kuli

Rozważamy kulę, na którą nie działa moment siły.

Równania Eulera mają postać:

$$\frac{d\omega_i}{dt} = 0$$

dla każdej ze składowych prędkości kątowej.

Zatem, w tym przypadku $\vec{\omega} = \text{const}$.

Zauważmy, że wniosek ten jest słuszny także dla jednorodnego sześcianu, o ile obraca się on wokół jednej z osi głównych.

Precesja prędkości kątowej swobodnego bąka o symetrii walcowej

W tym przypadku, $I_{x'} = I_{y'} \neq I_{z'}$ i równania Eulera mają postać:

$$\begin{cases} I_{x'}\frac{d\omega_{x'}}{dt} + (I_{z'} - I_{x'})\omega_{y'}\omega_{z'} &= 0 \\ I_{x'}\frac{d\omega_{y'}}{dt} - (I_{z'} - I_{x'})\omega_{x'}\omega_{z'} &= 0 \\ \frac{d\omega_{z'}}{dt} &= 0 \end{cases}$$

Stąd mamy, że $\omega_{z'} = \text{const}$. Niech $\Omega = \frac{(I_{z'} - I_{x'})}{I_{x'}}\omega_{z'}$, wtedy

$$\begin{cases} \frac{d\omega_{x'}}{dt} + \Omega\omega_{y'} &= 0 \\ \frac{d\omega_{y'}}{dt} - \Omega\omega_{x'} &= 0 \end{cases}$$

skąd $\omega_{x'} = \omega_{x',0}\cos(\Omega t + \phi)$, $\omega_{y'} = \omega_{y',0}\sin(\Omega t + \phi)$

Wirująca swobodnie obręcz

Wiemy już, że w przypadku obręczy wirującej w taki sposób, że (środkowa) oś obrotu nie jest prostopadła do płaszczyzny obręczy, wektor momentu pędu $\vec{L}$ ma inny kierunek niż wektor prędkości kątowej $\vec{\omega}$ i z powodu niezerowego momentu sił w łożysku - obraca się wokół wektora prędkości kątowej.

A co będzie, gdy obręcz nie będzie zamocowana i będzie wirować wokół osi (środkowej) ustawionej pod kątem do płaszczyzny obręczy?

W takiej sytuacji nie działa moment sił, więc stały jest moment pędu, zatem wektor prędkości kątowej okrąża wektor momentu pędu.

Precesja momentu pędu bryły wirującej w polu grawitacyjnym

Niech będzie bryła sztywna podparta w jednym punkcie.

Jeśli bryła nie wiruje, to pod wpływem działania momentu siły ciężkości obraca się względem kierunku wskazywanego przez ten moment - się przewraca.

Jeśli zaś wiruje z prędkością kątową ω, to pod wpływem momentu siły następuje zmiana kierunku mmentu pędu (moment siły jest prostopadły do momentu pędu, więc zmienia jego kierunek, a nie wartość).