# Fizyka I (mechanika) 1100 - 1AF14
# Fizyka I 1100 - 1B01

## Wykład 11

Jerzy Łusakowski

# Plan wykładu

Transformacja prędkości

Doświadczenie myślowe Tolmana

Doświadczenie Bucherera

Energia w mechanice relatywistycznej

# Transformacja prędkości

Powracamy do rozpatrywanego kiedyś problemu: obserwator $\mathscr{O}'$ mierzy prędkość cząstki $\vec{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z)$. Jaką prędkość zmierzy obserwator $\mathscr{O}$, jeśli prędkość $\mathscr{O}'$ względem $\mathscr{O}$ jest równa $\vec{V} = (V, 0, 0)$?

Obserwatorzy $\mathscr{O}$ i $\mathscr{O}'$ rejestrują kolejne położenia cząstki w kolejnych chwilach czasu. Określenie położenia cząstki jest zdarzeniem, któremu $\mathscr{O}$ przypisuje współrzędne $(ct, x)$, zaś $\mathscr{O}'$ przypisuje współrzędne $(ct', x')$. Relacja między współrzędnymi określonymi przez obu obserwatorów dana jest transformacją Lorentza:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \gamma(x' + \beta ct') \\ ct & = & \gamma(ct' + \beta x') \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} dx & = & \gamma(dx' + \beta cdt') \\ cdt & = & \gamma(cdt' + \beta dx') \end{array} \right.$$

# Transformacja prędkości

Dzieląc stronami otrzymujemy:

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{u'_x + V}{1 + \frac{u'_x V}{c^2}}$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{u'_y}{\gamma(1 + \frac{u'_x V}{c^2})}$$

$$u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{u'_z}{\gamma(1 + \frac{u'_x V}{c^2})}$$

# Transformacja prędkości - przypadki szczególne: $\beta \to 0$

Gdy $\beta \to 0$, wówczas:

$$u_x \to u'_x + V$$
$$u_y \to u'_y$$
$$u_z \to u'_z$$

i otrzymujemy transformację Galileusza, niezależnie od wartości $u$ oraz $V$.

# Transformacja prędkości - przypadki szczególne: $u'_x = c, u'_y = u'_z = 0$

W takim przypadku:

$$u_x = \frac{c+V}{1+\frac{cV}{c^2}} = c,$$

$$u_y = 0,$$

$$u_z = 0$$

zgodnie z założeniem, że prędkość światła we wszystkich układach jest stała. Zauważmy, że wynik ten jest słuszny także wtedy, gdy $V = c$. Czyli, gdyby foton poruszający się w kierunku $+x$ (obserwator $\mathscr{O}'$) wyemitował foton (obserwowana cząstka) poruszający się także w kierunku $+x$, to pomiar prędkości wyemitowanego fotonu przez obserwatora $\mathscr{O}$ da wynik $c$.

# Transformacja przyspieszenia

Podobnie, jak w przypadku transformacji prędkości możemy określić, w jaki sposób transformują się składowe przyspieszenia.

$$a'_x = \frac{du'_x}{dt'} = \frac{d\left(\frac{u_x - V}{1-\frac{u_x V}{c^2}}\right)}{dt'} = \frac{d\left(\frac{u_x - V}{1-\frac{u_x V}{c^2}}\right)}{dt}\frac{1}{dt'/dt} =$$

$$= \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{u_x - V}{1-\frac{u_x V}{c^2}}\right)}{\frac{d}{dt}(\gamma(1-u_x V/c^2))} = \frac{(1-V^2/c^2)^{3/2}}{(1-u_x V/c^2)^3}a_x,$$

$$a'_y = \frac{(1-V^2/c^2)}{(1-u_x V/c^2)^2}\left[a_y + \frac{u_y V/c^2}{1-u_x V/c^2}a_x\right],$$

$$a'_z = \frac{(1-V^2/c^2)}{(1-u_x V/c^2)^2}\left[a_z + \frac{u_z V/c^2}{1-u_x V/c^2}a_x\right].$$

# Doświadczenie myślowe (Gedankenexperiment, thought experiment) Tolmana

Doświadczenie myślowe, w którym z zasady zachowania pędu i relatywistycznej transformacji prędkości wynika zależność masy od prędkości

- Rozpatrujemy zderzenie dwóch malutkich, doskonale sprężystych kulek z punktu widzenia dwóch układów inercjalnych $\mathscr{U}$ i $\mathscr{U}'$, zdefiniowanych w sposób "standardowy". "Malutki" oznacza, że zderzenie następuje w jednym punkcie przestrzeni.
- Obaj obserwatorzy mierzą tę samą masę kulek w swoich układach w przypadku, gdy kulki nie poruszają się względem mierzącego ich masę obserwatora.
- Zakładamy, że kulka 1 porusza się w $\mathscr{U}$ z prędkością $\vec{u} = u\vec{e}_z$, zaś kulka 2 porusza się w układzie $\mathscr{U}'$ z predością $\vec{u}' = -u\vec{e}_{z'}$.
- Zakładamy, że kulki zostały puszczone w ruch tak, że w chwili zderzenia ich środki leżą na prostej równoległej do osi $z$ (tzn., zderzenie nastąpiło w punkcie leżącym na osi $x$, a zatem także na osi $x'$). W takiej sytuacji składowe prędkości w kierunku $x$ i $y$ nie ulegną zmianie - siły zderzeniowe działają wyłącznie wzdłuż prostej łączącej środki kul.

# Doświadczenie myślowe Tolmana

**Przed zderzeniem**

| | $U$ | | | $U'$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Kulka 1 | $u_{1x}$ | $=$ | $0$ | $u'_{1x'}$ | $=$ | $-v$ |
| | $u_{1y}$ | $=$ | $0$ | $u'_{1y'}$ | $=$ | $0$ |
| | $u_{1z}$ | $=$ | $u$ | $u'_{1z'}$ | $=$ | $u/\gamma$ |
| Kulka 2 | $u_{2x}$ | $=$ | $v$ | $u'_{2x'}$ | $=$ | $0$ |
| | $u_{2y}$ | $=$ | $0$ | $u'_{2y'}$ | $=$ | $0$ |
| | $u_{2z}$ | $=$ | $-u/\gamma$ | $u'_{2z'}$ | $=$ | $-u$ |

**Po zderzeniu**

| | $U$ | | | $U'$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Kulka 1 | ${}^*u_{1x}$ | $=$ | $0$ | ${}^*u'_{1x'}$ | $=$ | $-v$ |
| | ${}^*u_{1y}$ | $=$ | $0$ | ${}^*u'_{1y'}$ | $=$ | $0$ |
| | ${}^*u_{1z}$ | $=$ | ${}^*u$ | ${}^*u'_{1z'}$ | $=$ | ${}^*u/\gamma$ |
| Kulka 2 | ${}^*u_{2x}$ | $=$ | $v$ | ${}^*u'_{2x'}$ | $=$ | $0$ |
| | ${}^*u_{2y}$ | $=$ | $0$ | ${}^*u'_{2y'}$ | $=$ | $0$ |
| | ${}^*u_{2z}$ | $=$ | $-{}^*u/\gamma$ | ${}^*u'_{2z'}$ | $=$ | $-{}^*u$ |

# Doświadczenie myślowe Tolmana

Stosujemy zasadę zachowania pędu (np. w układzie $\mathscr{U}$) pamiętając, że masa zależy od wartości (czyli modułu) prędkości.

$$\begin{array}{lcl}
x: \quad m(\sqrt{u^2})0 + m(\sqrt{v^2 + u^2/\gamma^2})v & = & m(\sqrt{{}^*u^2})0 + m(\sqrt{v^2 + {}^*u^2/\gamma^2})v \\
y: \quad m(\sqrt{u^2})0 + m(\sqrt{v^2 + u^2/\gamma^2})0 & = & m(\sqrt{{}^*u^2})0 + m(\sqrt{v^2 + {}^*u^2/\gamma^2})0 \\
z: \quad m(\sqrt{u^2})u - m(\sqrt{v^2 + u^2/\gamma^2})\frac{u}{\gamma} & = & m(\sqrt{{}^*u^2}){}^*u - m(\sqrt{v^2 + {}^*u^2/\gamma^2})\frac{{}^*u}{\gamma}
\end{array}$$

Z pierwszego równania wynika, że

$$m\left(\sqrt{v^2 + u^2/\gamma^2}\right) = m\left(\sqrt{v^2 + {}^*u^2/\gamma^2}\right),$$

czyli $u = \pm {}^*u$. Ponieważ wynik ten musi przechodzić w wynik otrzymany w przypadku nierelatywistycznym, musimy wybrać $u = -{}^*u$. Z trzeciego równania dostajemy wtedy:

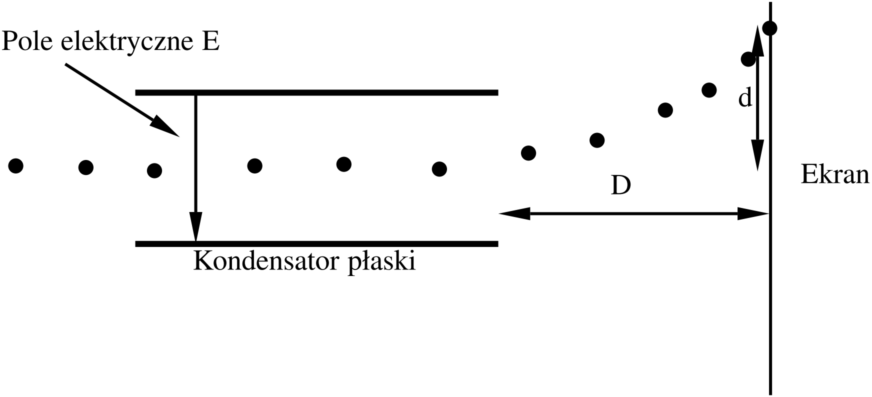
$$m\left(\sqrt{v^2 + u^2/\gamma^2}\right) = m\left(\sqrt{u^2}\right)\gamma = \frac{m(u)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

# Masa relatywistyczna

Zatem, dla $u \to 0$ mamy:

$$m(\upsilon) = \frac{m(0)}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}.$$

# Separator prędkości - doświadczenie Bucherera (1908)




Pole magnetyczne $B$, prostopadłe do płaszczyzny rysunku, jest obecne w kondensatorze i poza nim.

Zmieniając pole elektryczne $E$ w kondensatorze oraz pole magnetyczne $B$ możemy wybierać z wiązki elektronów tylko takie, dla których

$$\upsilon = \frac{E}{B},$$

tzn. takie, dla których wypadkowa siła pochodząca od pola elektrycznego ($eE$) i magnetycznego ($e\upsilon B$) jest równa zero. Łatwo można wykazać, że mierzone odchylenie $d$ wiązki elektronów o prędkości $\upsilon = E/B$ wiąże się z wartościami $D$, $E$ i $B$ w następujący sposób:

$$\frac{e}{m} = \frac{2d}{D^2 + d^2}\frac{E}{B^2}.$$

# Wynik doświadczenia Bucherera

| $\frac{v}{c}$ | $\frac{e}{m}$ ($10^{11}$C/kg) | $\frac{e}{m_0}$ ($10^{11}$C/kg) |
|---|---|---|
| $0,3173$ | $1,661$ | $1,752$ |
| $0,3787$ | $1,630$ | $1,761$ |
| $0,4281$ | $1,590$ | $1,760$ |
| $0,5154$ | $1,511$ | $1,763$ |
| $0,6870$ | $1,283$ | $1,767$ |

# Praca i energia kinetyczna

Podobnie, jak w przypadku nierelatywistycznym, mnożymy skalarnie równanie ruchu przez $d\vec{r}$:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r}$$

$$dW = dE_k = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} = d\vec{p} \cdot \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon} \cdot d(m\vec{\upsilon})$$

$$W = E_k = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\upsilon} \vec{v} \cdot d(m\vec{v}) = \vec{v} \cdot m\vec{v}|_0^{\upsilon} - \int_0^{\upsilon} m\vec{v} \cdot d\vec{v} =$$

$$= m\upsilon^2 - \int_0^{\upsilon} \frac{m_0 v dv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = (\gamma - 1)m_0c^2.$$

$$W = E_k = (m - m_0)c^2$$

# Energia cząstki

Zatem, energia kinetyczna cząstki wyraża się przez relatywistyczny wzrost masy:

$$E_k = (m - m_0)c^2.$$

Wielkość $m_0c^2$ nazywamy *energią spoczynkową cząstki* - jest ona niezmiennikiem transformacji Lorentza (ma taką samą wartość we wszystkich inercjalnych układach odniesienia).
Całkowita energia cząstki jest równa

$$E = mc^2.$$

Zależność ta pozwala na stwierdzenie, że każdej energii możemy przypisać pewną bezwładność,

# Energia cząstki

Wiemy, że $\vec{p} = \gamma m_0 \vec{\upsilon}$.
Pomnóżmy to równanie obustronnie przez $c$, podnieśmy do kwadratu i dodajmy do obu stron $m_0^2 c^4$:

$$m_0^2 c^4 + p^2 c^2 = m_0^2 c^4 + \gamma^2 c^2 m_0^2 \upsilon^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1-\beta^2} = E^2.$$

Czyli

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

$$E_k = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} - m_0 c^2$$

Na marginesie: $\vec{p} = m\vec{\upsilon} = \frac{E}{c^2}\vec{\upsilon}$.

# Przybliżenie nierelatywistyczne

$$E_k = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} - m_0c^2 = m_0c^2(\gamma - 1) = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) \approx$$

$$\approx m_0c^2(1 + \frac{1}{2}\beta^2 - 1) = \frac{1}{2}m\upsilon^2.$$

# Przybliżenie ultrarelatywistyczne

Jeśli cząstka ma zerową masę spoczynkową, to $E = pc$, czyli $p = E/c$. Z drugiej strony, $p = \frac{E}{c^2}\upsilon$, czyli w tym przypadku otrzymujemy $\upsilon = c$: cząstki bezmasowe poruszają się z prędkością światła.

Jeśli

$$pc \gg m_0 c^2,$$

to

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} \approx pc.$$

czyli otrzymujemy zależność energii od pędu taką, jak dla fotonu!

# Transformacja energii i pędu

Są na to dwa sposoby:

- albo korzystamy z transformacji prędkości, masy i energii relatywistycznej i obliczamy bezpośrednio związek między pędem cząstki obserwowanym z dwóch układów odniesienia,
- albo argumentujemy odwołując się do niezmiennika, jakim jest masa spoczynkowa.

Pierwszy sposób jest dość uciążliwy algebraicznie, więc zajmiemy się drugim.

# Transformacja energii i pędu

Wiemy, że

$$m_0^2c^4 = E^2 - p^2c^2$$

Ale $m_0^2c^4$ ma tę samą wartość we wszystkich układach inercjalnych - jest niezmiennikiem transformacji Lorentza. Podobnie jest z wyrażeniem $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$. Zatem przyjmujemy odpowiedniość:

$$ct \leftrightarrow E, \quad x \leftrightarrow cp_x, \quad y \leftrightarrow cp_y, \quad z \leftrightarrow cp_z$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} cp'_x & = & \gamma(cp_x - \beta E) \\ cp'_y & = & cp_y \\ cp'_z & = & cp_z \\ E & = & \gamma(E - \beta cp_x) \end{array} \right.$$

# Masa niezmiennicza

Rozważmy układ cząstek, z których każda ma pęd $\vec{p}_i$ oraz energię $E_i$.
Wprowadźmy całkowity pęd $\vec{P}$ i energię $E$ układu:

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i, \qquad E = \sum_i E_i$$

Korzystając z liniowości transformacji Lorentza, mamy:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} cP'_x & = & \gamma(cP_x - \beta E) \\ cP'_y & = & cP_y \\ cP'_z & = & cP_z \\ E' & = & \gamma(E - \beta c P_x) \end{array} \right.$$

Definiujemy *masę niezmienniczą* $\mathscr{M}$:

$$E^2 - P^2c^2 = E'^2 - P'^2c^2 = \mathscr{M}^2c^4$$

Zauważmy, że zasada zachowania energii i pędu sprawia, że masa niezmiennicza ma tę samą wartość w obu układach odniesienia przed i po zderzeniu.

# Układ środka masy

Definiujemy prędkość środka masy wiążąc pęd całkowity z energią całkowitą układu cząstek, podobnie, jak dla pojedynczej cząstki:

$$\vec{V}_{SM} = \frac{c^2 \vec{P}}{E}$$

Pęd w układzie środka masy (załóżmy, że $\vec{P}$ ma w układzie $\mathscr{U}$ tylko składową $x$):

$$cP_{x,SM} = \gamma(cP_x - \beta E) = \gamma(cP_x - \frac{cP_x}{E}E) = 0.$$

Zatem, masa niezmiennicza jest równa całkowitej energii układu cząstek mierzonej w ich środku masy.