Fizyka I (mechanika) 1100 - 1AF14
Fizyka I 1100 - 1B01

Wykład 12

Jerzy Łusakowski

Plan wykładu

Zderzenia

Efekt Comptona

Ruch pod wpływem stałej siły

Masa niezmiennicza: LAB vs. SM

Rozpatrzymy układ złożony z dwóch poruszających się cząstek o masach spoczynkowych $m_{0,1}$ i $m_{0,2}$.
Energia i pęd cząstek w LAB jest równa $E_{LAB,1}, \vec{p}_{LAB,1}$ oraz $E_{LAB,2}, \vec{p}_{LAB,2}$.
W układzie SM, mamy, odpowiednio:

$$E_{SM,1} = \gamma(E_{LAB,1} - \beta c p_{LAB,1,x}); \quad c p_{SM,1,x} = \gamma(c p_{LAB,1,x} - \beta E_{LAB,1});$$

$$E_{SM,2} = \gamma(E_{LAB,2} - \beta c p_{LAB,2,x}), \quad c p_{SM,2,x} = \gamma(c p_{LAB,2,x} - \beta E_{LAB,2}).$$

Dodając stronami, otrzymujemy:

$$E_{SM} = \gamma(E_{LAB} - \beta c P_{LAB,x}), \quad c P_{SM,x} = \gamma(c p_{LAB,x} - \beta E_{LAB}),$$

gdzie

$$E_{LAB} = E_{LAB,1} + E_{LAB,2}, \quad \vec{P}_{LAB} = \vec{p}_{LAB,1} + \vec{p}_{LAB,2},$$

$$E_{SM} = E_{SM,1} + E_{SM,2}, \quad \vec{P}_{SM} = \vec{p}_{SM,1} + \vec{p}_{SM,2} = 0,$$

przy czym

$$p_{LAB,i,y} = p_{SM,i,y}, \quad p_{LAB,i,z} = p_{SM,i,z}, \quad i = 1,2.$$

Masa niezmiennicza: LAB vs. SM

Niezmiennik transformaty Lorentza dla całkowitej energii i całkowitego pędu:

$$\mathcal{M}^2c^4 = E^2_{LAB} - P^2_{LAB,x}c^2 - P^2_{LAB,y}c^2 - P^2_{LAB,z}c^2 = E^2_{SM}c^2$$

$$\mathcal{M}^2c^4 =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{2} E_{LAB,i}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{2} p_{LAB,i,x}\right)^2 c^2 - \left(\sum_{i=1}^{2} p_{LAB,i,y}\right)^2 c^2 - \left(\sum_{i=1}^{2} p_{LAB,i,z}\right)^2 c^2 =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{2} m(\upsilon_{LAB,i})c^2\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{2} p_{LAB,i,x}\right)^2 c^2 - \left(\sum_{i=1}^{2} p_{LAB,i,y}\right)^2 c^2 - \left(\sum_{i=1}^{2} p_{LAB,i,z}\right)^2 c^2.$$

$$\mathcal{M}^2c^4 = \left(\sum_{i=1}^{2} m(\upsilon_{SM,i})c^2\right)^2$$

Energia progowa

Rozpatrzmy zderzenie, w którym cząstka o masie spoczynkowej $m_{0,1}$ ma przed zderzeniem w układzie LAB energię E_1 i pęd $\vec{p}_1$, i zderza się z cząstką o masie $m_{0,2}$ spoczywającą w układzie LAB. Dla uproszczenia: $\vec{p}_1 = p_1 \vec{e}_x$.

Ile powinna wynosić minimalna energia E_1, aby w wyniku zderzenia powstało N cząstek o łącznej masie spoczynkowej $M = \sum_{i=1}^{N} m_{0,i}$?

Energia ta nazywana jest *energią progową*.

Wykorzystamy dwa fakty:

- masa niezmiennicza jest niezmiennikiem transformacji Lorentza, czyli jest taka sama w układzie LAB i SM;
- obowiązuje zasada zachowania energii i pędu.

Energia progowa

$$\mathscr{M}^2c^4 = (E^{przed}_{LAB,1} + m_{0,2}c^2)^2 - (p^{przed}_{LAB,1})^2c^2 =$$

$$= (E^{przed}_{LAB,1} + m_{0,2}c^2)^2 - \left((E^{przed}_{LAB,1})^2 - m^2_{0,1}c^4\right) =$$

$$= 2E^{przed}_{LAB,1}m_{0,2}c^2 + (m^2_{0,1} + m^2_{0,2})c^4$$

$$\mathscr{M}^2c^4 = \left(\sum_{i=1}^{N} m(\upsilon^{po}_{SM,i})c^2\right)^2$$

Warunek energii minimalnej będzie spełniony, gdy wytworzone cząstki będą spoczywać w układzie środka masy.

Energia progowa

$$2E^{przed}_{LAB,1,MIN}m_{0,2}c^2 + (m^2_{0,1} + m^2_{0,2})c^4 = \left(\sum_{i=1}^{N} m_{0,i}c^2\right)^2$$

$$E^{przed}_{LAB,1,MIN} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} m_{0,i}\right)^2 - (m^2_{0,1} + m^2_{0,2})}{2m_{0,2}}c^2$$

Zwykle interesuje nas minimalna energia kinetyczna, równa

$$E^{przed}_{LAB,1,MIN,kin} = E^{przed}_{LAB,1,MIN} - m_{0,1}c^2 :$$

$$E^{przed}_{LAB,1,MIN,kin} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} m_{0,i}\right)^2 - (m_{0,1} + m_{0,2})^2}{2m_{0,2}}c^2$$

Efekt Comptona

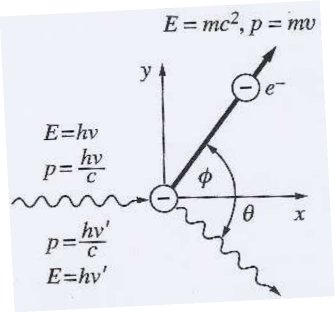
Doświadczenie Comptona (1923 r.) umożliwiło doświadczalne potwierdzenie istnienia fotonu jako skończonej porcji energii. Za swoją pracę A. H. Compton otrzymał nagrodę Nobla w 1927 r.

Przebieg doświadczenia: wiązka promieni Roentgena o dokładnie określonej długości fali kierowana była na blok grafitowy. Mierzono natężenie promieni Roentgena w funkcji długości fali dla różnych kątów rozproszenia.

Wynik doświadczenia: mimo, że wiązka kierowana na blok grafitowy miała określoną długość fali λ, wiązka rozproszona była złożona z promieniowania o dwóch długościach fali: λ i $\lambda' > \lambda$, przy czym różnica $\lambda' - \lambda$ zależała od kąta rozproszenia θ.

Wyniku doświadczenia Comptona nie można wytłumaczyć traktując promieniowanie elektromagnetyczne jak falę - w obrazie falowym nie jest możliwa zmiana długości fali wskutek rozproszenia.

Opis korpuskularny efektu Comptona



W obrazie korpuskularnym, gdy *traktujemy foton jak cząstkę, której energia wiąże się z długością fali zależnością* $E = hc/\lambda$, mówimy, że foton w zderzeniu z elektronem traci na rzecz elektronu część swojej energii, w związku z czym zwiększa się długość rozproszonej fali.

Opis korpuskularny efektu Comptona

Foton o energii $E = h\nu = hc/\lambda$ *ma pęd* $p = E/c$ *oraz długość fali* $\lambda = h/p = hc/E$.

Rozproszone elektrony mogą poruszać się z bardzo dużą prędkością, wiec do opisu energii kinetycznej należy stosować wzory relatywistyczne.

Korzystamy z zasady zachowania pędu i energii. Zakładamy, że foton padający porusza się wzdłuż osi x, rozproszony elektron porusza się pod kątem ϕ w stosunku do osi x, zaś rozproszony foton - pod kątem θ do osi x.

Opis korpuskularny efektu Comptona

Zasada zachowania pędu:

$$\text{Składowa } x \ : \frac{h}{\lambda} = p\cos\phi + \frac{h}{\lambda'}\cos\theta;$$

$$\text{Składowa } y \ : 0 = p\sin\phi - \frac{h}{\lambda'}\sin\theta.$$

Zasada zachowania energii:

$$\frac{hc}{\lambda} + m_0c^2 = \gamma m_0c^2 + \frac{hc}{\lambda'}.$$

Opis korpuskulary efektu Comptona

Trzeba pamiętać, że γ jest funkcją pędu p - zależy od prędkości elektronu. Biorąc pod uwagę, że $p = \gamma m_0 \upsilon$ otrzymamy $\gamma^2 = 1 + p^2/c^2 m_0^2$.

Z zasady zachowania pędu, eliminując ϕ, otrzymamy:

$$p^2 = \frac{h^2}{\lambda'^2} + \frac{h^2}{\lambda^2} - \frac{2h^2}{\lambda\lambda'} \cos\theta.$$

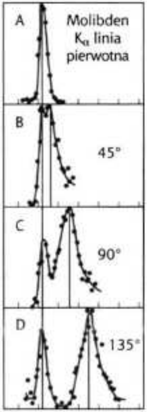
Wyznaczone p^2 podstawiamy do wyrażenia na γ^2 i porównujemy z γ^2 wyznaczonym z zasady zachowania energii.

Przesunięcie Comptonowskie

Po prostych przekształceniach otrzymamy:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta).$$

Otrzymane wyrażenie opisuje tzw. przesunięcie comptonowskie. Jak widać przesunięcie to zależy od kąta obserwacji. Jest równe zero w przypadku rozproszenia w przód i maksymalne (równe $2h/m_0c$) w przypadku rozproszenia do tyłu.



Relatywistyczny związek siły i przyspieszenia

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \qquad \vec{p} = \gamma m_0 \vec{v}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m_0 \frac{d\gamma}{dt}\vec{v} + m_0 \gamma \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3 \beta \frac{d\beta}{dt}$$

$$\vec{F} = \gamma m_0 \vec{a} + \gamma^3 \beta \frac{d\beta}{dt} m_0 \vec{v}$$

Relatywistyczny związek siły i przyspieszenia

To wyrażenie możemy zapisać w innej postaci. Ponieważ $E = \gamma m_0 c^2$, to

$$\frac{dE}{dt} = m_0 c^2 \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt}(m_0 c^2 + E_k) =$$

$$= \frac{dE_k}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{F} \cdot d\vec{r}) = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

$$m_0 \frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{c^2} \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\vec{F} = \gamma m_0 \vec{a} + \frac{\vec{v}}{c^2}(\vec{F} \cdot \vec{v})$$

Przyspieszenie - relatywistycznie

$$\vec{a} = \frac{1}{\gamma m_0}\left[\vec{F} - \frac{\vec{v}}{c^2}(\vec{F}\cdot\vec{v})\right]$$

W ogólności, przyspieszenie nie jest równoległe do siły!
Jest równoległe w dwóch przypadkach:

$$\vec{F}||\vec{v} \Rightarrow \vec{a} = \frac{1}{\gamma^3 m_0}\vec{F}$$

$$\vec{F} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{a} = \frac{1}{\gamma m_0}\vec{F}$$

Rozpędzanie naładowanej cząstki w polu elektrycznym

Siła działająca na cząstkę jest równa:

$$\vec{F} = q\vec{\mathscr{E}} = q\mathscr{E}\vec{e}_x$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q\mathscr{E}}{\gamma m_0}\left(\vec{e}_x - \frac{v_x\vec{v}}{c^2}\right)$$

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} & = & \frac{q\mathscr{E}}{\gamma m_0}\left(1 - \frac{v_x^2}{c^2}\right) \\ \frac{dv_y}{dt} & = & \frac{q\mathscr{E}}{\gamma m_0}\left(-\frac{v_x v_y}{c^2}\right) \\ \frac{dv_z}{dt} & = & \frac{q\mathscr{E}}{\gamma m_0}\left(-\frac{v_x v_z}{c^2}\right) \\ \gamma & = & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{cases}$$

Zakładamy, że w chwili początkowej $v_y = v_z = 0$. Wtedy $v_y = v_z = 0$ dla każdego t, czyli ruch odbywa się wyłącznie w kierunku x.

Rozpędzanie naładowanej cząstki w polu elektrycznym

Ponieważ $\vec{v} = v_x \vec{e}_x = v \vec{e}_x$, to mamy równanie:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{q\mathscr{E}}{\gamma^3 m_0} = \frac{q\mathscr{E}}{m_0}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2},$$

czyli

$$\frac{1}{(\sqrt{1 - v^2/c^2})^3}\frac{dv}{dt} = \frac{q\mathscr{E}}{m_0}.$$

Mamy:

$$\frac{d}{dt}\frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{(\sqrt{1 - v^2/c^2})^3}\frac{dv}{dt}.$$

Rozpędzanie naładowanej cząstki w polu elektrycznym

Całkując równanie ruchu po czasie dostajemy:

$$\frac{\upsilon}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = \frac{q\mathscr{E}t}{m_0}.$$

(Stała całkowania jest równa zero, na podstawie warunku początkowego $\upsilon(0) = 0$.)

Zatem:

$$\upsilon(t) = \frac{c}{\sqrt{1+\left(\frac{cm_0}{q\mathscr{E}t}\right)^2}}$$

oraz

$$x(t) = \frac{m_0 c^2}{q\mathscr{E}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{q\mathscr{E}t}{cm_0}\right)^2} - 1\right].$$

Ruch w polu magnetycznym

$$\vec{F} = q\vec{\upsilon} \times \vec{B}$$

W tym przypadku $\vec{F} \cdot \vec{\upsilon} = 0$, czyli energia cząstki jest stała, czyli masa jest też stała: $m = \gamma m_0 = \text{const}$. Równanie ruchu:

$$\vec{a} = \frac{1}{\gamma m_0} q\vec{\upsilon} \times \vec{B}$$

$$\begin{cases} \frac{d\upsilon_x}{dt} & = & \frac{qB}{\gamma m_0}\upsilon_y \\ \frac{d\upsilon_y}{dt} & = & -\frac{qB}{\gamma m_0}\upsilon_x \\ \frac{d\upsilon_z}{dt} & = & 0 \\ \gamma & = & \frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \end{cases}$$

Ruch w polu magnetycznym

Ruch relatywistyczny w polu magnetycznym jest taki, jak w przypadku nierelatywistycznym, tylko masa cząstki jest równa γm_0.

$$m\frac{\upsilon^2}{r} = q\upsilon B$$

$$m\upsilon = p = qrB$$

$$\omega_c^{rel} = \frac{qB}{\gamma m} = \omega_c^{nrel}\sqrt{1-\beta^2}$$