

Poprawkowy egzamin pisemny z Mechaniki Klasycznej i Szczególnej Teorii Względności

Zadanie 1 (5 pkt.)

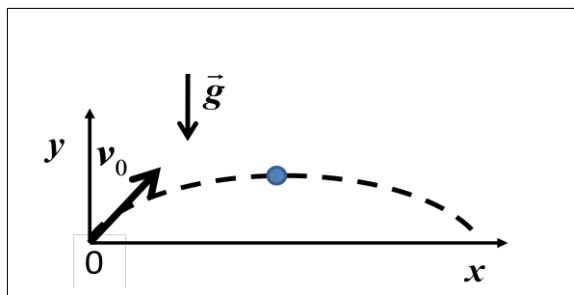
Cząstka o masie m została wystrzelona z punktu 0 pod kątem $\alpha=45^\circ$ do linii horyzontalnej z prędkością v_0 . Zakładając, że oprócz siły ciężkości mg skierowanej pionowo w dół w ośrodku działa również siła oporu ośrodka, która jest proporcjonalna do kwadratu składowej horyzontalnej prędkości cząstki,

$$\mathbf{F}_R = -k\mathbf{v}_x^2 = -k\dot{x}^2,$$

gdzie $k > 0$. znaleźć:

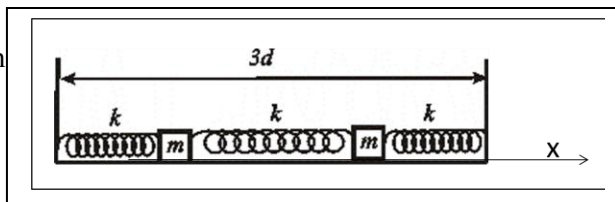
- Znaleźć zasięg cząstki d (czyli odległość od punktu $x=0$, gdzie cząstka osiągnie Ziemię)
- Przedyskutować ruch cząstki w wypadku braku oporu ośrodka (tzn. gdy $k = 0$).

W szczególności podać zasięg cząstki dla tego przypadku.



Zadanie 2 (7 pkt.)

Dwie masy m wykonują drgania w kierunku poziomym. Każda z mas jest zaczepiona za pomocą dwóch identycznych sprężyn do nieruchomej ścianki i do drugiej masy (patrz rysunek). Sprężyny mają identyczne stałe sprężystości k i długości swobodne d . Całkowita odległość między ściankami wynosi $3d$.



Lagranżjan dla tego układu sprzężonych oscylatorów w zmiennych q_1 i q_2 , będących wychyleniami mas z położenia równowagi, ma następującą postać:

$$L(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - k(q_1^2 + q_2^2 - q_1 q_2)$$

- Dla jakich wartości położenia mas w kierunku poziomym (x_1 i x_2) układ jest w stanie równowagi trwałej?
- Znaleźć częstotliwości i wektory własne układu.
- Podać jakim drganiom odpowiadają mody własne układu.

Zadanie 3 (13 pkt.)

Bryła sztywna w kształcie jednorodnej płyty prostokątnej o bokach a i b ($a > b$) i masie M , zawieszona w punkcie A pokazanym na rysunku, może obracać się swobodnie w pionowej płaszczyźnie wokół osi przechodzącej przez punkt A i prostopadłej do płaszczyzny płyty, tworząc płaskie wahadło fizyczne. Jednorodne pole grawitacyjne o natężeniu g jest skierowane pionowo w dół.

- Znaleźć położenie środka masy płyty S (w układzie związanym z bryłą

$$\text{sztywną) } \mathbf{R}_S = \frac{1}{M} \int \rho \mathbf{r} d\sigma,$$

gdzie ρ jest gęstością powierzchniową płyty, $d\sigma$ elementem powierzchni, a $\mathbf{r}$ wektorem leżącym w płaszczyźnie półdysku $\mathbf{r} = (x, y, 0)$.

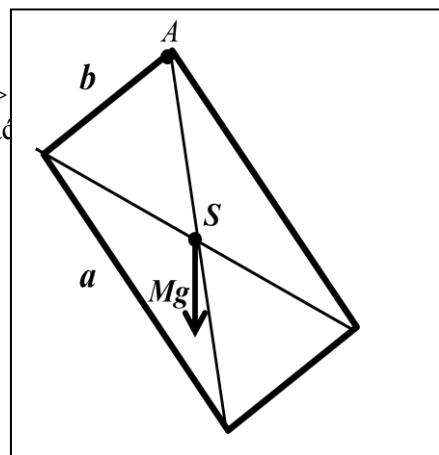
- Znaleźć moment bezwładności względem osi przechodzącej przez punkt S będący środkiem masy płyty i prostopadłej do jej płaszczyzny, $I_z^{(S)} = \int \rho \mathbf{r}^2 d\sigma$, gdzie jak poprzednio $\mathbf{r} = (x, y, 0)$.

c) Korzystając z twierdzenia Steinera $\mathbf{I} = \mathbf{I}^{(S)} + M\mathbf{d}^2$, które wyraża moment bezwładności $\mathbf{I}$ względem ustalonej osi przez moment bezwładności $\mathbf{I}^{(S)}$ względem równoległej osi przechodzącej przez środek masy i wzajemną odległość osi $\mathbf{d}$, znaleźć moment bezwładności $I_z^{(A)}$ względem osi obrotu płyty przechodzącej przez punkt A i prostopadłej do płaszczyzny półdysku.

- Znaleźć lagranżjan dla opisanego powyżej wahadła fizycznego.

e) Podać położenie równowagi trwałej wahadła?

- Znaleźć częstotliwość małych drgań wahadła wokół położenia równowagi.



Zakreśl prawidłową odpowiedź w pytaniach (1)-(10).

- a) $H(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$ b) $H(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} - V(\vec{x})$ c) $H(\vec{x}, \vec{p}) = \vec{p}^2 + V(\vec{x})$ d) $H(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{m} + V(\vec{x})$