Równania Lagrange'a 2 rodzaju

$$\sum_{i=1}^{N}(m_i\ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i)\cdot\delta\vec{r}_i = 0 \qquad i = 1\ldots N$$

q_j $\quad j = 1\ldots n$ $\quad$ współrzędne uogólnione

liczba n –

q_i – mogą być od siebie zależne i nie są sprecyzowane w danej chwili

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1\ldots q_n, t) \qquad i = 1,\ldots N$$

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right]\delta q_j = \sum_{j=1}^{n}Q_j\delta q_j$$

gdzie $\boxed{Q_j := \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}}$ $\quad$ siła uogólniona

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\vec{r}}_i\cdot\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right]\delta q_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}\left(m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right) - m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right]\delta q_j$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i} &= \frac{\partial\dot{\vec{r}}}{\partial\dot{q}_i}\\ \frac{\partial\dot{\vec{r}}}{\partial q_i} &= \frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial q_i}$$

$$\dot{\vec{r}} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial\vec{r}}{\partial t}$$

Pochodne cząstkowe są zamienne

$$\frac{\partial\dot{\vec{r}}}{\partial\dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_j}\delta_{ij} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}$$

$$\frac{\partial\dot{\vec{r}}}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_i\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_i\partial t}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right)$$

Czyli możemy napisać

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}\left(m_i\vec{v}_i\cdot\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}_j}\right) - m_i\vec{v}_i\cdot\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial q_j}\right]\delta q_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\vec{v}_i^{\,2}\right\} - \frac{\partial}{\partial q_j}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\vec{v}_i^{\,2}\right]\delta q_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}\right]\delta q_j$$

gdzie T energia kinetyczna $\boxed{T := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i^{\,2}}$

$$\sum_{i=1}^{N}(m_i\ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i)\cdot\delta\vec{r}_i = 0 \implies$$

$$\implies \boxed{\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j\right]\delta q_j = 0}$$

Jeżeli teraz założymy, że mamy k holonomicznych więzów, to mamy $3N-k=f$ niezależnych zmiennych.

Czyli $n = f = 3N-k$

Wtedy dla każdego $j = 1 \ldots 3N-k$, δq_j są niezależne od siebie.

$$\forall_j \quad \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0}$$

dowolne siły uogólnione.

Najczęściej w mechanice mamy do czynienia z siłami, które są potencjalne, tzn.

$$\vec{F}_i(\vec{r}_1\ldots\vec{r}_N, t) = -\frac{\partial V(\vec{r}_1\ldots\vec{r}_N, t)}{\partial\vec{r}_i}$$

$$X_j(x,t) = -\frac{\partial V(x,t)}{\partial x_j} \qquad x = \{x_1 \ldots x_{3N}\}$$

siła uogólniona dla sił potencjalnych

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial V(\vec{r},t)}{\partial\vec{r}_i}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}$$

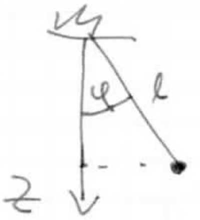
$$Q_j = \sum_{i=1}^{3N}X_i\cdot\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{3N}\frac{\partial V(x,t)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

$x_i = x_i(q_1 \ldots q_f, t)$ $\qquad f = 3N - k$

$$V(x(q_1 \ldots q_f, t), t) \equiv \hat{V}(q_1, \ldots q_f, t)$$

tutaj "^" w ogólności ma inną formę niż V

np.



$V = -mgz$ w zmiennych kartezjańskich

$V = -mgl\cos\varphi$ w zmiennej uogólnionej φ

W fizyce opuszczamy "^" $\qquad q \equiv \{q_1 \ldots q_f\}$

$$\frac{\partial V}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \longrightarrow \boxed{Q_j = -\frac{\partial V(q,t)}{\partial q_j}} \quad (□1)$$

Istnieją również siły, które dadzą się przedstawić w następującej formie

$$\boxed{Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}} \quad (□2)$$

gdzie $U = U(q_1 \ldots q_f, \dot{q}_1 \ldots \dot{q}_f, t)$

tzw "potencjał uogólniony"

Ważny przykład siła Lorentza

$\vec{F} = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B} \quad \longrightarrow \quad U = q(\Phi - \vec{v} \cdot \vec{A})$

$E = -\mathrm{grad}\,\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$

Często U jest też zapisywane jako V

Czyli dla sił uogólnionych, które dają się przedstawić w postaci (□1) lub (□2)

Można wprowadzić funkcję

$$\boxed{L := T - V}$$

L – funkcja Lagrange'a

$$L(q_1 \ldots q_f, \dot{q}_1 \ldots \dot{q}_f, t)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0} \qquad j = 1 \ldots f$$

← równania Lagrange'a 2 rodzaju

Tylko dla holonomicznych więzów i sił potencjalnych

Przykład

Swobodna cząstka $(k=0)$ w potencjale $V(x,y,z)$

x, y, z

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \qquad L = T - V$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$m\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \rightarrow m\ddot{x} = F_x$$

i podobnie

$$m\ddot{y} = F_y$$

$$m\ddot{z} = F_z$$

Przepis na otrzymanie równań ruchu

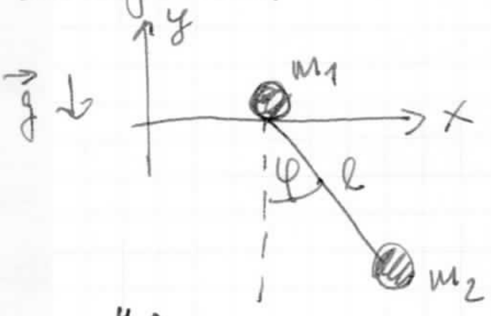
a) Wyrazić $L = T - V$ w zależności od $3N$ zmiennych (niekoniecznie niezależnych) i ich prędkości — czyli nie uwzględniając równań więzów

b) Wyrazić $3N$ zmiennych przez $3N-k$ zmiennych niezależnych zgodnych z więzami.
k – liczba równań więzów

c) Wyrazić L przez $3N-k$ zmiennych niezależnych i ich pochodne

d) Sformułować równania ruchu posługując się równ. Lagrange'a.

Przykład



Nie ma tarcia pomiędzy masą m_1 a płaszczyzną $y=0$

Płaski ruch $z_1 = 0 = z_2$

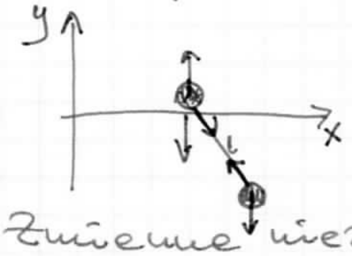
6 zmiennych zależnych

Warunki więzów

$z_1 = z_2 = 0$

$y_1 = 0$

$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l^2$



Zmienne niezależne: x_1 i φ – dla tych zmiennych równania ruchu spełnione tożsamościowo

$y_2 = -l\cos\varphi$; $x_2 = x_1 + l\sin\varphi$

$$T = \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2)$$

! $V = +m_2 g y_2 + m_1 g y_1$ pamiętać o znaku!

$\dot{y}_2 = l\sin\varphi\,\dot{\varphi}$

$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l\cos\varphi\,\dot{\varphi}$

$\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = \dot{x}_1^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\cos\varphi\,\dot{x}_1\dot{\varphi}$

$$L = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_1^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\cos\varphi\,\dot{x}_1\dot{\varphi}) + m_2 g l\cos\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = (m_1+m_2)\ddot{x}_1 + m_2 l(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = m_2 l^2\ddot{\varphi} + m_2 l\cos\varphi\,\ddot{x}_1 + m_2 g l\sin\varphi = 0$$

Niezmienniczość formy równań Lagrange'a II rodzaju

Słabość równań ruchu Newtona

Nie są niezmiennicze przy przejściu od jednego do drugiego układu współrzędnych

np. kartezjański $\rightarrow$ biegunowy

Ruch w polu siły centralnej

m

$$m\ddot{x} = F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$m\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

przechodzimy do zmiennych walcowych r, φ, z

Newtona równania ruchu dla zmiennych r i φ nie wyglądają tak samo jak dla x i y

$$\cancel{m\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r}} \qquad \cancel{m\ddot{\varphi} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}}$$

tylko

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -\frac{\partial V}{\partial r} \qquad mr(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = 0$$

Również postać równań ruchu Newtona zmienia się po przejściu od inercjalnego do nieinercjalnego układu współrzędnych.

Transformacje punktowe

pomiędzy niezależnymi zmiennymi

$$q_i \rightarrow Q_i = Q_i(q, t)$$

$\Longrightarrow$ Równania Lagrange'a II rodzaju zachowują swoją postać przy transformacjach punktowych.

Weźmy transformację odwrotną do transformacji punktowej czyli

$$Q_i \rightarrow q_i(Q, t)$$

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^{3N-K} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}\dot{Q}_j + \frac{\partial q_i}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_j} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}$$

$L'(Q, \dot{Q}, t)$ (możemy otrzymać przez wstawienie transformacji $q_i = q_i(Q, t)$ do

Funkcja Lagrange'a w nowych zmiennych

starej funkcji Lagrange'a L

$$L'(Q, \dot{Q}, t) = L[q(Q,t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t]$$

Uwaga funkcje Lagrange'a przy transformacjach punktowych

* zmieniają swoją postać
* nie zmieniają swojej wartości

$$\frac{\partial L'}{\partial Q_j} = \sum_{i=1}^{3N-k} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} \right]$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} = \sum_{i=1}^{3N-k} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_j} \underset{\text{relacja } \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_j} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}}{=} \sum_{i=1}^{3N-k} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} = \sum_{i=1}^{3N-k} \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}}_{\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j}} \right]$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial Q_j} = \sum_{i=1}^{3N-k} \underbrace{\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right]}_{=0} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = 0}$$

Równania Lagrange'a nie zmieniają formy przy transformacjach punktowych.

→ Ważność równań Lagrange'a II rodzaju

- Serce nowoczesnej mechaniki
- Formalizm szczególnie dobrze pasujący do otrzymywania równań ruchu.
- Inżynierowie (budowa maszyn) określają ruch ale później siły reakcji mają wielkie znaczenie.

Siły reakcji mogą być spowodowane przez więzy nieholonomiczne

Jak dostać siły reakcji ~~przy~~ jeżeli więzy są holonomiczne

1) Rozwiązać równ. Lagrange'a II rodzaju
2) $q_i(t) \to \vec{r}_i(t)$
3) $\vec{R}_i \equiv \vec{F}_{iR} = m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i$

FORMALISM LAGRANGE'a z TARCIEM

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0$$

$\leftarrow$ dowolne siły

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

siły potencjalne $L = T - V$

Przypadek gdy występują siły potencjalne i niepotencjalne, np. tarcie!

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \underbrace{R_j}_{\text{uogólniona siła tarcia}} = 0$$

$$R_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

TYPY SIŁ TARCIA

1) Tarcie statyczne $R_H \leq R_H^{max} = \mu_0 N$

2) Tarcie kinetyczne (poślizgu) $\vec{R} = -\mu N \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

1) i 2) Coulombowskie prawa tarcia

3) Tarcie potoczyste $\vec{R} = -\mu_R N \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

$\mu_R \ll \mu$

4) Tarcie w płynach $\vec{R} = -c_\omega A \frac{\varrho}{2} v^2 \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

Dla małych prędkości $c_\omega = \frac{const}{v}$; $|\vec{R}| \sim v$

Dla większych prędkości $c_\omega = const$

Częsta forma sił tarcia $\vec{R}_i = -h_i(v_i)\frac{\vec{v}_i}{|\vec{v}_i|}$ $i = 1 .. N$

$v_i \equiv |\vec{v}_i|$

Można zdefiniować funkcję dysypacji $P_i = \sum_{i=1}^{N} \int_0^{v_i} h_i(\tilde{v}_i)\, d\tilde{v}_i$

Oraz uogólnione siły tarcia $R_j = -\frac{\partial P}{\partial \dot{q}_j}$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_j} = 0}$$

Funkcja dysypacji odgrywa podobną rolę dla sił tarcia, jak potencjał dla sił potencjalnych.

- Bardzo częsty przypadek siła tarcia proporcjonalna do prędkości
- Wtedy funkcja dysypacyjna ma postać $P = \frac{1}{2} b_{11}(q)\dot{q}^2$

Położenie równowagi układu dynamicznego

Niech w chwili początkowej układ znajduje się w położeniu $\vec{r}_{i0}$ $i = 1 \ldots N$

a prędkości wszystkich punktów będą zero.
Jeżeli również w dowolnej innej chwili położenie punktów materialnych układu dane jest przez $\vec{r}_{i0}$ $(i = 1 \ldots N)$ to położenie to nazywamy położeniem równowagi układu.

To jest wtedy gdy

$$\boxed{\delta A = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0}$$

Zasada wirtualnych przesunięć

Praca wirtualna zadanych sił (zewnętrznych) powinna być równa 0.
Warunek konieczny i dostateczny położenia równowagi układu.

Zasada wirtualnych przesunięć we współrzędnych uogólnionych

$$\delta A = \sum_{j=1}^{n} Q_j \, \delta q_j$$

Dla więzów holonomicznych $n = 3N - k$
i δq_j $(j = 1 \ldots 3N-k)$ są niezależne

WARUNKIEM KONIECZNYM i DOSTATECZNYM RÓWNOWAGI ~~[illegible]~~ układu mechanicznego z holonomicznymi WIĘZAMI jest, aby w rozpatrywanym położeniu układu wszystkie siły uogólnione były równe zeru.

Tak więc położenie równowagi układu wyznacza $f = 3N - k$ równań

$$\boxed{Q_j = 0} \qquad j = 1 \dots f. \Rightarrow q_{eq}$$

- Tylko siły potencjalne

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

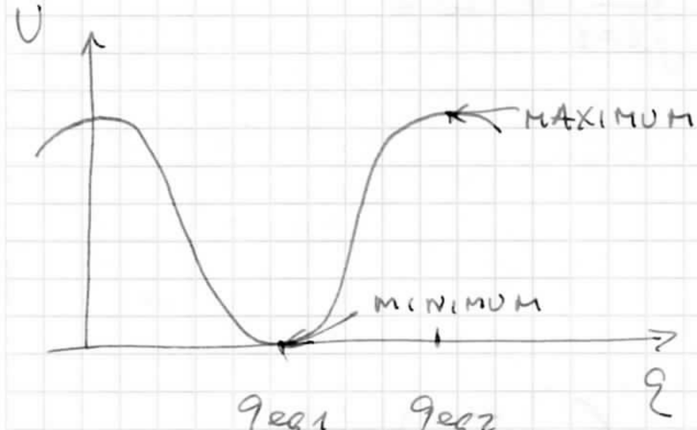
$$\boxed{\text{RÓWNOWAGA UKŁADU} \quad \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0}$$

- Siły potencjalne + siła tarcia proporcjonalna do prędkości

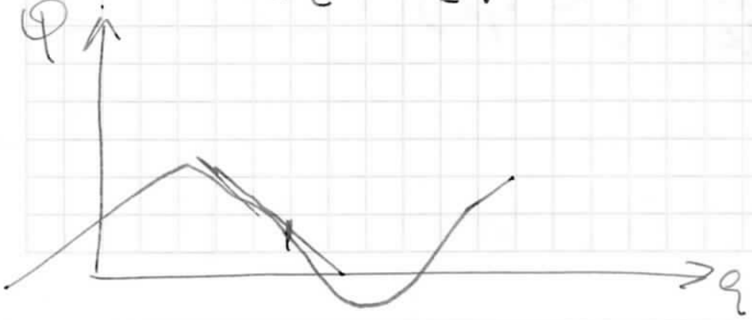
$$Q = \left(-\frac{\partial V}{\partial q} + b_u \dot{q}\right)_{\substack{q = q_{eq} \\ \dot{q} = 0}} = 0.$$

W położeniu równowagi energia potencjalna układu powinna osiągać ekstremum.

$$\boxed{\left.\frac{\partial V}{\partial q}\right|_{q = q_{eq}} = 0}$$



Położenie równowagi trwałej — MINIMUM ENERGII POTENCJALNEJ.



w11-2a

<u>Dowód</u> k-więzów holonomicznych

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1 \dots q_{3N-k})$$

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^{3N-k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \qquad T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\sum_{j=1}^{3N-k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)\left(\sum_{l=1}^{3N-k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}\dot{q}_l\right) =$$

$$= \sum_{j,l=1}^{3N-k} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}\right)}_{:= T_{jl}} \dot{q}_j \dot{q}_l = \sum_{j,l=1}^{3N-1} T_{jl}\, \dot{q}_j \dot{q}_l$$

Przypadek $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1 \dots q_{3N-k}, t)$ więzy reonomiczne

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^{3N-k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

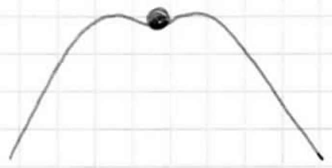
$$\Rightarrow \quad T = a + \sum_{j=1}^{3N-k} a_j \dot{q}_j + \sum_{j,l=1}^{3N-k} a_{jl}\, \dot{q}_j \dot{q}_l$$

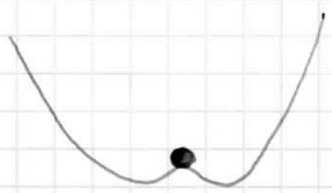
gdzie

$$a := \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)^2$$

$$a_j := \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

$$a_{jl} := \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \quad (= T_{jl})$$





położenie niestabilne (praktycznie stabilne)

Położenie stabilne (praktycznie niestabilne)

Ruch wokół położenia równowagi trwałej

$$q = q_0 + (q - q_0)$$

Małe drgania układu.

Zakładamy

1. Więzy są holonomiczne i skleronomiczne
2. nie dokonujemy transformacji na nieinercjalne ~~pary~~ układy
3. Układ jest zachowawczy. Nie ma sił tarcia.

Energia kinetyczna układu jest jednorodną kwadratową funkcją prędkości.

patrz 11-2a $$T = \sum_{i,j=1}^{f} T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \qquad f = 3N - k$$

$$T_{ij} = T_{ij}(q_1 \ldots q_f) \qquad T_{ij} = T_{ji}$$

Rozwijamy współczynniki wokół położeń równowagi q_{i0}

$$T_{ij}(q) = T_{ij}(q_0) + \sum_{l=1}^{n} \left.\frac{\partial T_{ij}(q)}{\partial q_l}\right|_0 q_l + \ldots$$

q_l – wychylenia z położenia równowagi

Rozpatrujemy tylko małe drgania układu

Wystarczy wziąć tylko człon $T_{ij}(q_0)$

$$T \cong \sum_{i,j=1}^{f} T_{ij}(q_0) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

~~Ustalcja~~ układ zachowawczy $\Rightarrow$ istnieje V

$$V(q) = V(q_0) + \underbrace{\sum_{i=1}^{f} \frac{\partial V}{\partial q_i}\Big|_0 q_i}_{=0} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{f} \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\Big|_0 q_i q_j + \dots$$

$$\boxed{L(q,\dot{q}) = \sum_{i,j=1}^{f} \left[T_{ij}(q_0)\,\dot{q}_i \dot{q}_j - V_{ij}\, q_i q_j \right]}$$

gdzie

$$V_{ij} := \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\Big|_0$$

daje równania ruchu $\displaystyle\sum_{j=1}^{f}\left[T_{ij}\ddot{q}_j + V_{ij} q_j\right] = 0$

człony z $i \neq j$ człony sprzęgające

założenie

$$q_j(t) = C a_j e^{i\omega t} \qquad j = 1 \dots f$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left[V_{ij} - \omega^2 T_{ij}(q_0)\right] a_j = 0$$

$$\boxed{\det\left|V_{ij} - \omega^2 T_{ij}(q_0)\right| = 0}$$

równanie sekularne na częstości własne