

# Egzamin z Ogólnej Teorii Względności I

30.01.2010

Za każde zadanie można otrzymać 5 punktów.

## 1. ZADANIE

### Metryka Schwarzschilda - de Sittera

Rozważmy sferycznie symetryczne rozwiązanie równań Einsteina ze stałą kosmologiczną  $\Lambda$ . Opisane jest ono metryką Schwarzschilda - de Sittera:

$$ds^2 = \alpha(r)dt^2 - \alpha^{-1}(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1)$$

gdzie

$$\alpha(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} \quad (2)$$

Porównać odchylenie promienia świetlnego przechodzącego z parametrem zderzenia  $b$  obok gwiazdy w metryce Schwarzschilda - de Sittera i w metryce Schwarzschilda.

### Rozwiązanie

Z ćwiczeń wiemy, że ruch w geometrii sferycznie symetrycznej jest płaski, zatem możemy założyć  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Daje to czteroprędkość  $u = (\dot{t}, \dot{r}, 0, \dot{\phi})$

Z postaci metryki widać dwa wektory Killinga:  $\partial_\phi$  i  $\partial_t$ . Iloczyn skalarny wektora Killinga z czteroprędkością jest całką ruchu,

$$\langle \partial_t, u \rangle = \alpha \dot{t} =: E \quad - \quad \langle \partial_\phi, u \rangle = r^2 \dot{\phi} =: L \quad (3)$$

Czteroprędkość promienia świetlnego jest wektorem zerowym, co daje nam równanie

$$u^\mu u_\mu = 0 = \alpha \dot{t}^2 - \frac{1}{\alpha} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\phi}^2 \quad (4)$$

wstawiając całki ruchu

$$0 = \frac{E^2}{\alpha} - \frac{\dot{r}^2}{\alpha} - \frac{L^2}{r^2} \quad (5)$$

$$\dot{r}^2 = E^2 - \frac{L^2}{r^2} \alpha(r) \quad (6)$$

Znajdźmy najmniejszą odległość  $r_0$ , na jaką tor promienia świetlnego zbliży się do centrum układu współrzędnych. W tej odległości prędkość radialna  $\dot{r}$  znika, więc

$$E^2 - \frac{L^2}{r_0^2} \alpha(r_0) = 0 \quad (7)$$

$$\frac{E^2}{L^2} + \frac{\Lambda}{3} = \frac{1}{r_0^2} - \frac{2M}{r_0^3} \quad (8)$$

Do obliczenia odchylenia promienia potrzebne nam będzie  $\frac{d\phi}{dr}$ , które obliczamy następująco:

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dr} = \frac{\dot{\phi}}{\dot{r}} = \frac{L^2}{r^2 \sqrt{E^2 - \frac{L^2}{r^2} \alpha(r)}} = \frac{\frac{1}{r^2}}{\sqrt{\frac{E^2}{L^2} - \frac{1}{r^2} \alpha(r)}} \quad (9)$$

Zatem

$$d\phi = \frac{\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{\frac{E^2}{L^2} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{1}{r^2} + \frac{2M}{r^3}}} = - \frac{du}{\sqrt{\frac{E^2}{L^2} + \frac{\Lambda}{3} - u^2 + 2Mu^3}} \quad (10)$$

Zmiana  $\phi$  na promieniu to całka z  $d\phi$  po całym promieniu. Jest ona równa podwojonej całce od nieskończoności do miejsca, w którym promień jest najbliższej gwiazdy. Ponadto przy nieobecności gwiazdy całka ta powinna wynieść  $\pi$ , bo promień przeleci z prawa na lewo nie odchyłając się. Stąd szukane odchylenie wynosi

$$\delta\phi = 2 \int_{\phi(r=\infty)}^{\phi(r=r_0)} d\phi - \phi = 2I - \phi \quad (11)$$

liczymy:

$$I = \int_{\phi(r=\infty)}^{\phi(r=r_0)} d\phi = \int_{\phi(u=0)}^{\phi(u=u_0)} d\phi = \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{\frac{E^2}{L^2} + \frac{\Lambda}{3} - u^2 + 2Mu^3}} \quad (12)$$

gdzie ośmielam się bezwstydnie zignorować znak, bo wiem, że zmiana kąta jest dodatnia, a znak mogę skompensować wyborem znaku przy wyciągnięciu pierwiastka w mianowniku.

Liczymy dalej. Zamienimy zmienne całkowania na bezwymiarowe  $x = \frac{u}{u_0}$ , gdyż  $u_0$  zależy od  $\Lambda$ , a łatwiej nam będzie tę zależność śledzić, gdy nie będzie ona występowała w granicach całkowania.

$$I = \int_0^1 \frac{d\frac{u}{u_0}}{\frac{1}{u_0} \sqrt{\frac{E^2}{L^2} + \frac{\Lambda}{3} - u^2 + 2Mu^3}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{E^2}{L^2 u_0^2} + \frac{\Lambda}{3u_0^2} - x^2 + 2Mu_0 x^3}} \quad (13)$$

Korzystamy ze sztuczki znanej z rozwiązań zadań z kolokwium: mnożymy równanie (??) przez  $\frac{1}{u_0^2}$ :

$$\frac{E^2}{L^2 u_0^2} + \frac{\Lambda}{3u_0^2} = \frac{1}{u_0^2 r_0^2} - \frac{2M}{u_0^2 r_0^3} = 1 - 2Mu_0 \quad (14)$$

I wstawiamy to do (??):

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - 2Mu_0 - x^2 + 2Mu_0 x^3}} \quad (15)$$

Spójrzmy teraz na zależność  $u_0$  od  $\Lambda$  i od  $b$ :

$$\frac{1}{b^2} := u_0^2 \Big|_{M=0} = \frac{E^2}{L^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (16)$$

a więc

$$u_0^2 - 2Mu_0^3 = \frac{1}{b^2} \quad (17)$$

czyli  $u_0(M, b, \Lambda) = u_0(M, b)$ . Mając więc dany w zadaniu parametr zderzenia  $b$  otrzymujemy ten sam promień minimalny  $r_0$  niezależnie od obecności stałej kosmologicznej. Zatem całka  $I$  zależy tylko od  $b$  i  $M$ , jest więc taka sama w przestrzeni Schwarzschilda - de Sittera, jak w przestrzeni Schwarzschilda, co kończy zadanie.

## Komentarz

- Ponieważ nie było powiedziane jasno, jak zdefiniowany jest parametr zderzenia, niektórzy przyjmowali  $b^2 = \frac{L^2}{E^2}$ . Wówczas prawidłową odpowiedzią było „kąąt odchylenia jest taki, jak dla promienia świetlnego o parametrze zderzenia  $b' = \sqrt{b^2 + \frac{\Lambda}{3}}$  w geometrii Schwarzschilda”. Takie rozwiązania też uznawałem.
- Niezależnie od przyjętej definicji parametru zderzenia powtarzał się często błąd pominięcia zależności granic całkowania od  $\Lambda$ . Fakt, powyżej udowodniłem, że  $u_0$  nie zależy od  $\Lambda$ , ale korzystanie z tego bez dowodu jest błędem, bo a priori może. Stąd uwaga praktyczna: *do porównywania, rozwijania w szereg i tym podobnych dużo wygodniejsze są całki o stałych granicach całkowania.* (np. 0 i 1)

## 2. ZADANIE

### Model Bianchi I

Rozważmy metrykę mającą trzy przestrzenne symetrie translacyjne o płaskich powierzchniach stałego czasu. Jest to tak zwany model Bianchi I, a opisuje go metryka:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 dx^2 - b(t)^2 dy^2 - c(t)^2 dz^2 \quad (18)$$

gdzie  $a$ ,  $b$  i  $c$  są (nieznikającymi) funkcjami czasu. Znaleźć formę krzywizny tej metryki. Następnie, zakładając, że funkcje  $a$ ,  $b$ ,  $c$  są postaci  $t^{p_i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ), nałożyć na tę metrykę próżniowe równania Einsteina (tzn. znaleźć warunki na wykładniki  $p_i$ , aby  $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0$ ).

*Wskazówka: Próżniowe równania Einsteina są równoważne zanikaniu tensora Ricciego  $R_{\mu\nu} = 0$  (dlaczego?).*

### Rozwiązanie

Najpierw dowód wskazówki. Zwęźmy równania Einsteina  $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0$  z odwrotnością metryki  $g^{\mu\nu}$ . Dostajemy:

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = R - \frac{1}{2}\delta^\mu{}_\mu R = R - \frac{4}{2}R \quad \Leftrightarrow \quad R = 0 \quad (19)$$

Czyli z próżniowych równań Einsteina wynika  $R = 0$ , co po podstawieniu do samych równań Einsteina daje

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (20)$$

Dowód w drugą stronę jest trywialny, gdyż  $R_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow R = 0$ .

Wracając do zadania: wygodnie jest wybrać koreper ortonormalny. Naturalnym wyborem wydaje się

$$\theta^0 = dt \quad \theta^i = a_i dx^i \quad (21)$$

gdzie wprowadziłem  $a_i = a, b, c$  - naturalne uproszczenie notacji; w definicji  $\theta_i$  *nie* sumuję po indeksie  $i$ . W tym koreperze metryka ma postać  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ , gdzie  $\eta = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ .

Aby obliczyć formę krzywizny potrzebna jest znajomość formy koneksji  $\omega^\mu{}_\nu$ . Do znalezienia jej stosuje się I równanie strukturalne i korzysta z faktu, że koneksja metryczna jest beztorsyjna:

$$\Theta^\mu = 0 = D\theta^\mu = d\theta^\mu + \omega^\mu{}_\nu \wedge \theta^\nu \quad (22)$$

Korzystać będziemy też z antysymetryczności formy koneksji z obniżonymi wskaźnikami:

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} \quad (23)$$

Dla  $\mu = 0$  dostajemy równanie:

$$0 = d\theta^0 + \omega^0_i \wedge \theta^i = 0 + \omega^0_i \wedge \theta^i \quad (24)$$

które najprościej rozwiązać zakładając  $\omega_{0i} \sim \theta^i$

Podstawiając  $\mu = i$  dostajemy:

$$0 = d\theta^i + \omega^i_0 \wedge \theta^0 + \omega^i_j \wedge \theta^j \quad (25)$$

obliczmy  $d\theta^i = a_i'(t)dt \wedge dx^i = \frac{a_i'}{a_i}dt \wedge a_i dx^i = \frac{a_i'}{a_i}\theta^0 \wedge \theta^i = -\frac{a_i'}{a_i}\theta^i \wedge \theta^0$  i dostajemy

$$0 = -\frac{a_i'}{a_i}\theta^i \wedge \theta^0 + \omega^i_0 \wedge \theta^0 + \omega^i_j \wedge \theta^j \quad (26)$$

czego rozwiązaniem jest  $\omega_{ij} = 0$  oraz  $\omega^i_0 = \frac{a_i'}{a_i}\theta^i$

Podsumowując forma koneksji jest postaci

$$\omega_{0i} = -\frac{a_i'}{a_i}\theta^i \quad \omega_{ij} = 0 = \omega_{\mu\mu} \quad (27)$$

Aby obliczyć formę krzywizny należy skorzystać z II równania strukturalnego:

$$\Omega := D\omega \quad (28)$$

czyli

$$\Omega_{\mu\nu} = d\omega_{\mu\nu} + \omega_{\mu\rho} \wedge \omega^{\rho\nu} \quad (29)$$

Dzięki antysymetryczności formy krzywizny wystarczy policzyć wyrazy pozadiagonalne. Znajdźmy nieznikające wkłady do tych członów:

$$\Omega_{0i} = d\omega_{0i} + \omega_{00} \wedge \omega^0_i + \omega_{0j} \wedge \omega^j_i = d\omega_{0i} = d\left(-\frac{a_i'}{a_i}\theta^i\right) = \dots \quad (30)$$

Wiele osób w tym miejscu popełniało błąd zapominając, że pochodna zewnętrzna działa także na formę  $\theta^i$ . Przeprowadźmy więc to różniczkowanie uważnie

$$\dots = -\left[d\left(\frac{a_i'}{a_i}\right) \wedge \theta^i + \frac{a_i'}{a_i}d\theta^i\right] = -\left[\frac{a_i''a_i - a_i'^2}{a_i^2}dt \wedge \theta^i + \frac{a_i'}{a_i}\left(\frac{a_i'}{a_i}\theta^0 \wedge \theta^i\right)\right] = -\left[\frac{a_i''a_i - a_i'^2 + a_i'^2}{a_i^2}\theta^0 \wedge \theta^i\right] = -\frac{a_i''}{a_i}\theta^0 \wedge \theta^i \quad (31)$$

A teraz człony przestrzenno-przestrzenne

$$\Omega_{ij} = d\omega_{ij} + \omega_{i0} \wedge \omega^0_j + \omega_{ik} \wedge \omega^k_j = \omega_{i0} \wedge \omega^0_j = \omega_{i0} \wedge \omega_{0j} = -\omega_{0i} \wedge \omega_{0j} = \frac{a_i' a_j'}{a_i a_j} \theta^i \theta^j \quad (32)$$

Dostajemy więc

$$\Omega_{0i} = -\frac{a_i''}{a_i}\theta^0 \wedge \theta^i \quad \Omega_{ij} = \frac{a_i' a_j'}{a_i a_j} \theta^i \theta^j \quad (33)$$

co kończy pierwszą część zadania.

Podstawienie za funkcje  $a_i$  funkcji potęgowych  $t^{p_i}$  daje nam błyskawicznie współczynniki formy krzywizny:

$$\frac{a_i''}{a_i} = \frac{p_i(p_i - 1)t^{p_i - 2}}{t^{p_i}} = p_i(p_i - 1)t^{-2} \quad \frac{a_i' a_j'}{a_i a_j} = \frac{p_i t^{p_i - 1} p_j t^{p_j - 1}}{t^{p_i + p_j}} = p_i p_j t^{-2} \quad (34)$$

i samą formę krzywizny

$$\Omega_{0i} = p_i(1 - p_i)t^{-2}\theta^0 \wedge \theta^i \quad \Omega_{ij} = p_i p_j t^{-2}\theta^i \wedge \theta^j \quad (35)$$

Z formy krzywiny obliczamy współczynniki tensora Riemanna. Można to robić przez popatrzenie, można to robić ściśle na wskaźnikach. Żadna metoda nie jest lepsza, pod warunkiem, że nie robi się błędów. Poniżej wersja ścisła:

$$\Omega_{0i} = \frac{1}{2}R_{0i\alpha\beta}\theta^\alpha \wedge \theta^\beta = \frac{1}{2}R_{0i0\beta}\theta^0 \wedge \theta^\beta + \frac{1}{2}R_{0ij\beta}\theta^j \wedge \theta^\beta = \frac{1}{2}R_{0i00}\theta^0 \wedge \theta^0 + \frac{1}{2}R_{0i0j}\theta^0 \wedge \theta^j + \frac{1}{2}R_{0ij0}\theta^i \wedge \theta^0 + \frac{1}{2}R_{0ijk}\theta^j \wedge \theta^k \quad (36)$$

wiemy, że  $R_{0i00} = 0$  oraz że  $R_{0i0j} = -R_{0ij0}$ , a także  $\theta^0 \wedge \theta^j = -\theta^j \wedge \theta^0$ , więc:

$$\Omega_{0i} = R_{0i0j}\theta^0 \wedge \theta^j + \frac{1}{2}R_{0ijk}\theta^j \wedge \theta^k \quad (37)$$

porównując to z (??) dostajemy

$$R_{0i0j} = p_i(1-p_i)t^{-2}\delta_{ij} \quad R_{0ijk} = 0 \quad (38)$$

Obliczając w ten sposób  $\Omega_{ij}$  można od razu pominąć część członów ( $R_{ij[0k]}$  i  $R_{ij00}$ ):

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}R_{ijkl}\theta^k \wedge \theta^l = R_{ijkl}(\theta^k \wedge \theta^l - \theta^l \wedge \theta^k) = p_i p_j t^{-2} \theta^i \wedge \theta^j \quad (39)$$

stąd

$$R_{ijkl} = p_i p_j t^{-2} (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (40)$$

Obliczamy składowe tensora Ricciego:

$$R_{ab} = R^\mu{}_{\mu ab} = R^0{}_{a0b} + R^i{}_{aib} = R_{0a0b} - R_{1a1b} - R_{2a2b} - R_{3a3b} \quad (41)$$

Od razu widać, że  $R_{0j} = 0$ , bo  $R_{000j} = 0 = R_{i0ij}$ . Policzmy  $R_{00}$

$$R_{00} = R_{0000} - R_{i0i0} = -R_{0i0i} = -\sum_i p_i(1-p_i)t^{-2} = [p_1(p_1-1) + p_2(p_2-1) + p_3(p_3-1)]t^{-2} \quad (42)$$

Policzmy  $R_{ij}$ :

$$R_{ij} = R_{0i0j} - R_{kikj} = p_i(1-p_i)t^{-2}\delta_{ij} - \sum_{k=1}^3 p_k p_i t^{-2} (\delta_{kk}\delta_{ij} - \delta_{kj}\delta_{iki}) = [p_i(1-p_i)\delta_{ij} - p_i(p_1+p_2+p_3)(3\delta_{ij} - \delta_{ij})]t^{-2} = [p_i(1-p_i - 2p_1 - 2p_2 - 2p_3)]t^{-2} \quad (43)$$

Zatem równania Einsteina sprowadzają się do następujących równań na wykładniki  $p_i$ :

$$\begin{cases} 0 & = & p_1(p_1-1) + p_2(p_2-1) + p_3(p_3-1) \\ 0 & = & p_i(1-p_i-2p_1-2p_2-2p_3) \end{cases} \quad (44)$$

Znajdźmy jeszcze ładną interpretację tych równań

### 3. ZADANIE

#### Siły pływowe w metryce Schwarzschilda

Rozważmy dwie cząstki próbne. Umieścimy je w czasoprzestrzeni opisanej metryką Schwarzschilda tak, aby obie cząstki leżały na tym samym promieniu  $((\theta_1, \phi_1) = (\theta_2, \phi_2))$ . Załóżmy, że w chwili  $t = 0$  są one w spoczynku względem centralnej gwiazdy oraz że odległość między cząstkami wynosi  $d \ll r_s$ . Znaleźć przyspieszenie tych cząstek względem siebie nawzajem w chwili  $t = 0$ .

## Rozwiązanie

Ze względu na symetrię problemu możemy ustalić  $\theta = \frac{\pi}{2}$  oraz  $\phi = 0$  i ograniczyć się do dwuwymiarowej podprzestrzeni  $(t, r)$ .

Równanie dewiacji geodezyjnej

$$\nabla_u \nabla_u n = -R(u, n)u \quad (45)$$

W przypadku opisanym w zadaniu mamy  $u = (u_t, 0)$  oraz  $n = (0, n_r)$ , dlatego  $\nabla_u \nabla_u n$  jest proporcjonalne do przyspieszenia  $\partial_t^2 d = a$ .

Trzeba policzyć  $R(u, n)u$ . Podstawiając postacie wektorów  $u$  i  $n$  i korzystając z

$$\Omega^\mu{}_\nu = R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta \quad \Rightarrow \quad R(X, Y) = R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta e_\mu \otimes \theta^\nu \quad (46)$$

dostajemy:

$$[R(u, n)u]^\mu = u_t^2 n_r R^\mu{}_{ttr} \quad (47)$$

Ponieważ ograniczyliśmy się do dwóch wymiarów, jedyna możliwa nieznikająca składowa tensora Riemanna, jaka tu może wystąpić, to  $R^r{}_{ttr}$ .

Obliczmy tensor Riemanna, jak to już mamy w zwyczaju, korzystając z równań strukturalnych. Wprowadźmy koreper

$$\theta^0 = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} dt \quad \theta^1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}} dr \quad (48)$$

Wtedy  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ .

Jedyna nieznikająca składowa koneksji to  $\omega_{01}$ . Liczymy ją ze wzoru

$$D\theta^0 = 0 = d\theta^0 + \omega^0{}_1 \wedge \theta^1 = \frac{\frac{r_s}{2r^2}}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}} dr \wedge dt + \omega_{01} \wedge \theta^1 = -\frac{\frac{r_s}{2r^2}}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}} \frac{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}} \theta^0 \wedge \theta^1 + \omega_{01} \wedge \theta^1 \quad (49)$$

czyli  $\omega_{01} = \frac{\frac{r_s}{2r^2}}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}} \theta^0 + f\theta^1$  łatwo sprawdzić, że  $f$  musi znikać:

$$D\theta^1 = 0 = d\theta^1 + \omega^1{}_0 \wedge \theta^0 = 0 - \omega_{10} \wedge \theta^0 = \omega_{01} \wedge \theta^0 = f\theta^1 \wedge \theta^0 = 0 \quad (50)$$

Obliczenie formy krzywizny jest proste:

$$\Omega_{01} = d\omega_{01} + \omega_{0i} \wedge \omega^i{}_1 = d\omega_{01} = d\left(\frac{\frac{r_s}{2r^2}}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}}\theta^0\right) = d\left(\frac{\frac{r_s}{2r^2}}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}}\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}dt\right) = d\left(\frac{r_s}{2r^2}dt\right) = -\frac{r_s}{r^3}dr \wedge dt = \frac{r_s}{r^3}\theta^0 \wedge \theta^1 \quad (51)$$

*Powodzenia!*

*JP*