Kolokwium z Ogolnej Teorii Wzglednosci I

13.01.2010

1. ZADANIE

W metryce Kerra

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{r_s r}{\rho^2}\right)\mathrm{d}t^2 - \frac{\rho^2}{\Delta}\mathrm{d}r^2 - \rho^2\mathrm{d}\theta^2 - \left(r^2 + \alpha^2 + \frac{r_s r\alpha^2}{\rho^2}\sin^2\theta\right)\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2 + \frac{2r_s r\alpha\sin^2\theta}{\rho^2}\mathrm{d}t\mathrm{d}\phi \tag{1}$$

gdzie

$$r_s = 2GM \qquad \alpha = \frac{J}{M} \qquad \rho^2 = r^2 + \alpha^2\cos^2\theta \qquad \Delta = r^2 - r_s r + \alpha^2 \qquad c = 1 \tag{2}$$

rozważyć cząstkę (planetę) poruszającą się w płaszczyźnie $\theta = \frac{\pi}{2}$. Napisać wzór pozwalający obliczyć przesunięcie peryhelim planety dysponując następującymi danymi:

- odległość planety od gwiazdy w peryhelium r_1
- odległość planety od gwiazdy w aphelium r_2
- masę gwiazdy M
- moment pędu gwiazdy J
- dwie całki ruchu planety: „energię” $E = \langle u, \partial_t\rangle$ oraz „moment pędu” $L = -\langle u, \partial_\phi\rangle$

Wzór można (a wręcz należy) zostawić w postaci całki z pierwiastka z czegoś.

Rozwiązanie Możemy ograniczyć się do $\theta = \frac{\pi}{2}$, więc $\rho^2 = r^2$, a metryka upraszcza się do postaci:

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r} + \frac{\alpha^2}{r^2}}\mathrm{d}r^2 - \left[r^2 + \alpha^2\left(1 + \frac{r_s}{r}\right)\right]\mathrm{d}\phi^2 + \frac{2r_s\alpha}{r}\mathrm{d}t\mathrm{d}\phi \tag{3}$$

$$\mathrm{d}s^2 = A\mathrm{d}t^2 - B\mathrm{d}r^2 - C\mathrm{d}\phi^2 + 2D\mathrm{d}t\mathrm{d}\phi \tag{4}$$

gdzie dla uproszczenia zapisu wprowadziłem oznaczenia

$$A = 1 - \frac{r_s}{r} \qquad B = \left(A + \frac{\alpha^2}{r^2}\right)^{-1} \qquad C = r^2 + \alpha^2 A \qquad D = \frac{r_s\alpha}{r} \tag{5}$$

Skorzystamy z twierdzenia, że dla krzywej geodezyjnej iloczyny skalarne czteroprędkości u^μ z wektorami Killinga k^μ są całkami ruchu *(dowód był na ćwiczeniach)*.

Czteroprędkość $u = (\dot{t}, \dot{r}, 0, \dot{\phi}) = \dot{t}\partial_t + \dot{r}\partial r + \dot{\phi}\partial_\phi$.

Tutaj wektorami Killinga są na pewno ∂_t oraz ∂_ϕ (i są to jedyne wektory Killinga). Mamy więc całki ruchu

$$E = \langle u, \partial_t\rangle = A\dot{t} + D\dot{\phi} \qquad -L = \langle u, \partial_\phi\rangle = D\dot{t} - C\dot{\phi} \tag{6}$$

Ponieważ trajektoria planety jest czasową krzywą geodezyjną, jej czteroprędkość jest unormowana, skąd mamy kolejne równanie

$$\langle u, u\rangle = 1 = A\dot{t}^2 - B\dot{r}^2 - C\dot{\phi}^2 + 2D\dot{t}\dot{\phi} \tag{7}$$

Z (6) dostajemy:

$$D\dot{t}\dot{\phi} = E\dot{t} - A\dot{t}^2 = -L\dot{\phi} + C\dot{\phi}^2 \tag{8}$$

$$2D\dot{t}\dot{\phi} = E\dot{t} - L\dot{\phi} - A\dot{t}^2 + C\dot{\phi}^2 \tag{9}$$

Wstawiając do (7):

$$1 = A\dot{t}^2 - B\dot{r}^2 - C\dot{\phi}^2 + E\dot{t} - L\dot{\phi} - A\dot{t}^2 + C\dot{\phi}^2 = -B\dot{r}^2 + E\dot{t} - L\dot{\phi} \tag{10}$$

odwikłując

$$\dot{r}^2 = \frac{E\dot{t} - L\dot{\phi} - 1}{B} \tag{11}$$

Zauważmy, że

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\mathrm{d}\phi\mathrm{d}s \tag{12}$$

a do policzenia ruchu peryhelium potrzebne nam jest $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}$. Przekształcamy więc (11)

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 \dot{\phi}^2 = \frac{E\dot{t} - L\dot{\phi} - 1}{B} \tag{13}$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} = \frac{\dot{\phi}\sqrt{B}}{\sqrt{E\dot{t} - L\dot{\phi} - 1}} \tag{14}$$

Obrót peryhelium przy jednym obiegu orbity jest dwókrotnie większy, niż przy połowie obiegu orbity, czyli przy przejściu od peryhelium do aphelium:

$$\Delta\phi = 2\int_{\phi(r_1)}^{\phi(r_2)} \mathrm{d}\phi - 2\pi = 2I - 2\pi \tag{15}$$

Liczymy całkę I

$$\mathrm{d}\phi = \frac{\dot{\phi}\sqrt{B} \quad \mathrm{d}r}{\sqrt{E\dot{t} - L\dot{\phi} - 1}} \tag{16}$$

$$I = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\dot{\phi}\sqrt{B} \quad \mathrm{d}r}{\sqrt{E\dot{t} - L\dot{\phi} - 1}} \tag{17}$$

Pozostaje wyrazić $\dot{t}$ i $\dot{\phi}$ przez całki ruchu (równania (6)) i wstawić wyniki:

$$\dot{\phi} = \frac{EL + ED}{AC + D^2} \qquad \dot{t} = \frac{EC - LD}{AC + D^2} \tag{18}$$

$$I = \int_{r_1}^{r_2} \frac{(L + D)\sqrt{B} \quad \mathrm{d}r}{\sqrt{AC - D^2}\sqrt{C - L - \frac{AC - D^2}{E^2}}} \tag{19}$$

Punktacja

Za dobrze zrobione zadanie jest 5 punktów. Punkty obcinałem za błędy:

- źle obliczane iloczyny skalarne (wzory (6), wzór (7)) - *do 1 punkta*
- zła interpretacja kąta, który wychodzi jako wynik całki (wzór (15)) - *0,5 punkta*
- za pozostałe błędy rachunkowe - w zależności od wagi.

Innych błędów nie zauważyłem.

2. ZADANIE

Obliczyć odchylenie promienia świetlnego przechodzącego w pobliżu czarnej dziury (nierotującej). Wynik podać jako funkcję masy gwiazdy M oraz parametru zderzenie b. *Wskazówka:* $\frac{1}{b^2} = \frac{E^2}{L^2}$ *(dlaczego?). Wskazówka 2: Wynik rozwinąć w szereg w* M *i podać z dokładnością do wyrazów liniowych.*

Rozwiązanie Metrykę Schwarzschilda bierzemy z metryki Kerra z poprzedneigo zadania, podstawiając wszędzie $\alpha = 0$ (ewentualnie znamy ją na pamięć)

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - \frac{1}{1-\frac{r_s}{r}}\mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}\theta^2 - r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2 \tag{20}$$

gdzie tak, jak poprzednio, $r_s = 2GM$.

Ruch w metryce Schwarzschilda jest płaski (dowód był na ćwiczeniach), więc bez straty ogólności można założyć, że odbywa się w płaszczyźnie $\theta = \frac{\pi}{2}$. Wtedy metryka upraszcza się:

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - \frac{1}{1-\frac{r_s}{r}}\mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}\phi^2 \tag{21}$$

Czterowektor prędkości $u = (\dot{t}, \dot{r}, 0, \dot{\phi}) = \dot{t}\partial_t + \dot{r}\partial_r + \dot{\phi}\partial_\phi$. Obliczamy całki ruchu:

$$E = \langle u, \partial_\phi\rangle = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\dot{t} \qquad\qquad -L = \langle u, \partial_\phi\rangle = -r^2\dot{\phi} \tag{22}$$

oraz kwadrat wektora prędkości (który wynosi zero, bo światło porusza się po krzywych zerowych):

$$u^\mu u_\mu = 0 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\dot{t}^2 - \frac{1}{1-\frac{r_s}{r}}\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2 \tag{23}$$

Podstawiając z całki ruchu:

$$0 = \frac{E^2}{1-\frac{r_s}{r}} - \frac{\dot{r}^2}{1-\frac{r_s}{r}} - \frac{L^2}{r^2} \tag{24}$$

$$\dot{r}^2 = E^2 - L^2\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r_s}{r^3}\right) \tag{25}$$

Wyznaczymy r_1 - najbliższą odległość toru promienia świetlnego od giazdy. Dla $r = r_1$ prędkość radialna znika, więc r_1 jest rozwiązaniem równania:

$$\frac{1}{{r_1}^2} - \frac{r_s}{{r_1}^3} = \frac{E^2}{L^2} \tag{26}$$

Parametr zderzenia b to najbliższa odległość, na jaką zbliżyłby się tor promienia do środka układu współrzędnych, gdyby nie był zakrzywiony. Jest więc równy promieniowi r_1 obliczonemu w przypadku zerowej masy $M = 0$, czyli dla $r_s = 0$, co dowodzi prawdziwości wskazówki (są też inne metody dowodu):

$$\frac{1}{b^2} = \frac{E^2}{L^2} \tag{27}$$

Korzystając z

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\dot{\phi} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\frac{L}{r^2} \tag{28}$$

dostajemy, z (25)

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 = r^4\left(\frac{E^2}{L^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{r_s}{r^3}\right) \tag{29}$$

podstawiając parametr zderzenia (27) dostajemy, po prostej algebrze:

$$\mathrm{d}\phi = \frac{\frac{\mathrm{d}r}{r^2}}{\sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{r_s}{r^3}}} = -\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{b^{-2} - u^2 + r_s u^3}} \tag{30}$$

Aby policzyć odchylenie promienia należy scałkować $\mathrm{d}\phi$ po całym promieniu świetlnym i odjąć π. Ta całka jest równa podwojonej całce po promieniu od nieskończoności do r_1:

$$\Delta\phi = 2\int_{\infty}^{r^1} \frac{\frac{\mathrm{d}r}{r^2}}{\sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{r_s}{r^3}}} - \pi = 2I - \pi \tag{31}$$

Liczymy całkę I:

$$I = \int_{\infty}^{r_1} \frac{\frac{\mathrm{d}r}{r^2}}{\sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{r_s}{r^3}}} = -\int_0^{u_1} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{b^{-2} - u^2 + r_s u^3}} = \cdots \tag{32}$$

Będziemy rozwijać całkę w szereg, wygodniej się to robi, gdy granice całki nie zależą od parametru rozwijanego, dlatego zamienimy zmienną u na $x = u/u_1$:

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}(\frac{u}{u_1})}{\sqrt{\frac{1}{b^2{u_1}^2} - \frac{u^2}{{u_1}^2} + \frac{r_s u_1 u^3}{{u_1}^3}}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{{r_1}^2}{b^2} - x^2 + \frac{r_s}{r_1}x^3}} \tag{33}$$

Ponieważ promień Schwarzshielda r_s jest proporcjonalny do masy gwiazdy, możemy liczyć rozwinięcie w szereg w r_s. Znajdźmy zależność r_1 od r_s. Z równań (26) i (27)

$$\frac{1}{b^2} = \frac{E^2}{L^2} = \frac{1}{{r_1}^2} - \frac{r_s}{{r_1}^3} \tag{34}$$

$$\frac{{r_1}^2}{b^2} = 1 - \frac{r_s}{r_1} \tag{35}$$

Wyrażenie $\frac{r_s}{r_1}$ jest już liniowe w r_s, dlatego w pierwszym rzędzie można podstawić $r_1|_{r_s=0} = b$. Dostajemy:

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r_1} - x^2 + \frac{r_s}{r_1}x^3}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2 + \frac{r_s}{r_1}(x^3 - 1)}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1 + \frac{r_s}{r_1}\frac{x^3-1}{1-x^2}}} \tag{36}$$

Rozwijanie w szereg w M oznacza, że promień świetlny przechodzi w odległości od gwiazdy znacznie większej, niż jej promien Schwarzshilda, czyli $\frac{r_s}{r_1} \ll 1$. Można więc skorzystać z rozwinięcia $\frac{1}{\sqrt{1+a}} = 1 - \frac{1}{2}a + o(a^2)$:

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\left(1 - \frac{r_s}{2r_1}\frac{x^3 - 1}{1 - x^2}\right) = J_1 - \frac{r_s}{2r_1}J_2 \tag{37}$$

Pierwszą całkę z sumy wykonujemy trywialnie:

$$J_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x|_0^1 = \frac{\pi}{2} \tag{38}$$

Całkę J_2 wykonujemy z pomocą tablic Bronsztejna:

$$J_2 = \int_0^1 \frac{x^3\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{3/2}} - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{3/2}} = \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\Bigg|_0^1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\Bigg|_0^1 \tag{39}$$

$$J_2 = \sqrt{1-1} - \sqrt{1-0} + \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-0}} - \lim_{x\to 1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{0}{\sqrt{1-0}} \tag{40}$$

$$J_2 = -2 + \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = -2 + \lim_{x\to 1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = -2 + \sqrt{\frac{1-1}{1+1}} = -2 \tag{41}$$

Wstawiamy do (37):

$$I = J_1 - \frac{r_s}{2r_1} J_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{r_s}{r_1} \tag{42}$$

Dla $M = 0$ mamy $r_1 = b$, zaś $r_s = 2GM$

$$I(M = 0) = \frac{\pi}{2} + \frac{2GM}{b} \tag{43}$$

Więc ostatecznie, z (31):

$$\Delta\phi = 2I - \pi \approx \frac{4GM}{b} \tag{44}$$

Punktacja
Za zadanie można było otrzymać 5 punktów, z czego 4 punkty za otrzymanie wyniku zawierającego całkę I, na przykład w postaci (32), oraz 1 punkt za rozwinięcie tej całki w szereg i obliczenie pierwszego wyrazu. Za samą próbę rozwinięcia w szereg, niezakończoną powodzeniem, dawałem 0,5 punkta. Poza tym, standartowo, ucinałem połówki punktów za błędy.

3. ZADANIE

Wiedząc, że trójwymiarowe hiperpowierzchnie o stałej krzywiźnie i metryce o sygnaturze (+,-,-) można sparametryzować tak, aby metryka miała postać:

$$\mathrm{d}\Sigma^2 = a^2 \frac{\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2}{1 + \frac{k}{4}\left(t^2 - x^2 - y^2\right)} \tag{45}$$

znaleźć ogólną postać metryki jednorodnej w jednym kierunku czasowym A oraz dwóch kierunkach przestrzennych B i C, oraz izotropowej względem trójwymiarowej grupy Lorentza $SO(1,2)$ działającej na A, B, C. Znaleźć dwuformę krzywizny dla tej metryki.

Rozwiązanie Zauważmy podobieństwo między sformułowaniem zadania a sformułowaniem problemu, jaki postawił sobie Friedman. Szukał on metryki jednorodnej (względem trzech wektorów przestrzennych) i izotropowej (względem grupy obrotów tych wektorów, $SO(3)$). Zatem metryka będąca rozwiązaniem zadania to metryka Friedmana, z tą różnicą, że zmienne t i z są zamienione miejscami.

Nieco ściślej: rozważmy kierunek prostopadły jednocześnie do pól A, B i C. W każdym punkcie jest to kierunek przestrzenny. Oznaczmy pole (unormowane) związane z tym kierunkiem jako Z. Możemy je odcałkować dostając współrzędną z. Dzięki unormowaniu Z metryka jest postaci

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}z^2 + \gamma_{ab}\mathrm{d}x^a\mathrm{d}x^b \tag{46}$$

gdzie wprowadzam indeksy a, b (potem także c...) zmieniające się w zakresie od 0 do 2.

Z symetrii wynika, że powierzchnie stałego z muszą być powierzchniami o stałej krzywiźnie *(było na wykładzie przy okazji metryki Friedmana)*. Korzystamy więc ze wskazówki w treści zadania i wybieramy taki układ współrzędnych, że

$$\gamma_{ab}\mathrm{d}x^a\mathrm{d}x^b\big|_{z=z_0} = a^2 \frac{\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2}{1 + \frac{k}{4}\left(t^2 - x^2 - y^2\right)} \tag{47}$$

Metryka może a priori zależeć od z. Do metryki o formie jak (47) zależność od z można wprowadzić jedynie uzmienniając stałą a, więc ogólna postać metryki spełniającej warunki zadania to:

$$\mathrm{d}s^2 = a(z)^2 \frac{\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2}{1 + \frac{k}{4}\left(t^2 - x^2 - y^2\right)} - \mathrm{d}z^2 \tag{48}$$

Obliczmy teraz dwuformę krzywizny dla tej metryki.

W tym celu wybieramy koreper θ^μ taki, że metryka jest postaci:

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\theta^\mu\theta^\nu \tag{49}$$

gdzie $\eta = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1)$. A oto i sam koreper:

$$\theta^a = \frac{a(z)\mathrm{d}x^a}{1 + \frac{k}{4}\left(t^2 - x^2 - y^2\right)} \qquad\qquad \theta^3 = \mathrm{d}z \tag{50}$$

dla ułatwienia wprowadzę oznaczenie $s^2 = t^2 - x^2 - y^2$.

Obliczmy formę koneksji Levi-Civity tej metryki ω. Znajdziemy ja korzystając z faktu, iż jest ona beztorsyjna, zatem

$$D\theta = \Theta = 0 \qquad\qquad D\theta^\mu = \mathrm{d}\theta^\mu + \omega^\mu{}_\nu \wedge \theta^\nu = 0 \tag{51}$$

Musimy zróżniczkować koreper. Zauważmy, że

$$\mathrm{d}s^2 = 2t\mathrm{d}t - 2x\mathrm{d}x - 2y\mathrm{d}y = 2x_a\mathrm{d}x^a \tag{52}$$

gdzie $x_a := \eta_{ab}x^b$ (podobnie, już bez komentarza, obniżał będę na przykład wskaniki przy θ oraz inne), oraz że

$$\mathrm{d}x^a = \frac{1 + \frac{ks^2}{4}}{a}\theta^a \tag{53}$$

Liczymy:

$$\mathrm{d}\theta^3 = 0 \tag{54}$$

$$\mathrm{d}\theta^a = \frac{a'\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x^a}{1 + \frac{ks^2}{4}} - \frac{a}{\left(1 + \frac{ks^2}{4}\right)^2}\frac{2kx_b}{4}\mathrm{d}x^b \wedge \mathrm{d}x^a = \frac{kx_b}{2a}\theta^a \wedge \theta^b - \frac{a'}{a}\theta^a \wedge \theta^3 \tag{55}$$

Równania strukturalne:

$$\omega^3{}_a \wedge \theta^a = 0 \tag{56}$$

$$\omega^a{}_b \wedge \theta^b + \omega^a{}_3 \wedge \theta^3 + \frac{kx_b}{2a}\theta^a \wedge \theta^b - \frac{a'}{a}\theta^a \wedge \theta^3 = 0 \tag{57}$$

Rozwiązuje się je przez popatrzenie: patrzymy i widzimy, że założenie $\omega^a{}_3 \sim \theta^a$ upraszcza równania - trywialnie spełnia pierwsze z nich, a pozostałe trzy sprowadza do postaci:

$$\omega^a{}_3 = \frac{a'}{a}\theta^a \qquad\qquad \omega^a{}_b \wedge \theta^b + \frac{kx_b}{2a}\theta^a \wedge \theta^b = 0 \tag{58}$$

A więc, z drugiego równania, wyciągamy wniosek, że

$$\omega^a{}_b = -\frac{kx_b}{2a}\theta^a + f(x)\theta^b \tag{59}$$

Dalej korzystając z antysymetryczności formy koneksji z opuszczonymi wskaźnikami ($\omega_{ab} = -\omega_{ba}$) zgadujemy jej postać jako

$$\omega_{ab} = \frac{k}{2a}\left(x_a\theta_b - x_b\theta_a\right) \tag{60}$$

Więc

$$\omega^a{}_b = \frac{k}{2a}\left(x^a\theta_b - x_b\theta^a\right) \tag{61}$$

Podstawiamy (61) do (58) i widzimy, że jest spełnione, zatem znaleźliśmy właściwą postać formy koneksji.

Kolejnym, ostatnim już krokiem do znalezienia formy krzywizny jest skorzystanie z rugiego równania strukturalnego:

$$D\omega = \Omega \qquad \text{czyli} \qquad D\omega^\mu{}_\nu = \mathrm{d}\omega^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\rho \wedge \omega^\rho{}_\nu = \Omega^\mu{}_\nu \tag{62}$$

Podobnie, jak w przypadku formy koneksji, mamy antysymetrię ($\Omega_{\mu\nu} = -\Omega_{\nu\mu}$), która redukuje liczbę równań.

Komu w drogę, temu różniczkę zewnętrzą, do dzieła:

Policzmy najpierw $\Omega^a{}_3$:

$$\Omega^a{}_3 = \mathrm{d}\omega^a{}_3 + \omega^a{}_\mu \wedge \omega^\mu{}_3 = \mathrm{d}\omega^a{}_3 + \omega^a{}_b \wedge \omega^b{}_3 \tag{63}$$

bo $\omega^3{}_3 = 0$

$$\mathrm{d}\omega^a{}_3 = \mathrm{d}\left(\frac{a'}{a}\right)\wedge\theta^a + \frac{a'}{a}\mathrm{d}\theta^a = \frac{a''a - a'^2}{a^2}\theta^3\wedge\theta^a + \frac{a'}{a}\left(\frac{kx_b}{2a}\theta^a\wedge\theta^b - \frac{a'}{a}\theta^a\wedge\theta^3\right) = \frac{a'kx_b}{2a^2}\theta^a\wedge\theta^b - \frac{a''}{a}\theta^a\wedge\theta_3 \tag{64}$$

$$\omega^a{}_b\wedge\omega^b{}_3 = \frac{k}{2a}\left(x^a\theta_b - x_b\theta^a\right)\wedge\frac{a'}{a}\theta^b = -\frac{ka'x_b}{2a^a}\theta^a\wedge\theta^b \tag{65}$$

dodając powyższe równania dostajemy

$$\Omega^a{}_3 = -\frac{a''}{a}\theta^a\wedge\theta_3 \tag{66}$$

No i została ostatnia prosta, czyli $\Omega^a{}_b$:

$$\Omega^a{}_b = \mathrm{d}\omega^a{}_b + \omega^a{}_\mu\wedge\omega^\mu{}_b = \mathrm{d}\omega^a{}_b + \omega^a{}_c\wedge\omega^c{}_b + \omega^a{}_3\wedge\omega^3{}_b \tag{67}$$

Liczymy

$$\mathrm{d}\omega^a{}_b = \mathrm{d}\left[\frac{k}{2a}\left(x^a\theta_b - x_b\theta^a\right)\right] = -\frac{k}{2}\frac{a'}{a^2}\theta^3\wedge\left(x^a\theta_b - x_b\theta^a\right) + \frac{k}{2a}\left(\mathrm{d}x^a\theta_b - \mathrm{d}x_b\theta^a\right) + \frac{k}{2a}\left(x^a\mathrm{d}\theta_b - x_b\mathrm{d}\theta^a\right) \tag{68}$$

no dobrze, nie ostatnia prosta, ale ostatni odcinek specjalny. Zanim się zaróżniczkujemy, policzmy $\omega^a{}_\mu\wedge\omega^\mu{}_b$, aby wiedzieć, jakich członów szukać w (68), aby się uprościły.

$$\omega^a{}_3\wedge\omega^3{}_b = -\omega^a{}_3\wedge\omega_{3b} = \omega^a{}_3\wedge\omega_{b3} = \frac{a'}{a}\theta^a\wedge\frac{a'}{a}\theta_b = \frac{a'^2}{a^2}\theta^a\wedge\theta_b \tag{69}$$

$$\omega^a{}_c\wedge\omega^c{}_b = \frac{k}{2a}\left(x^a\theta_c - x_c\theta^a\right)\wedge\frac{k}{2a}\left(x^c\theta_b - x_b\theta^c\right) = \frac{k^2}{4a^2}\left(x^ax^c\theta_c\wedge\theta_b - x_cx^c\theta^a\wedge\theta_b - x^ax_b\theta_c\wedge\theta^c + x_cx_b\theta^a\wedge\theta^c\right) \tag{70}$$

ale $x_cx^c = s^2$ oraz $\theta_c\wedge\theta^c = 0$, więc

$$\omega^a{}_c\wedge\omega^c{}_b = \frac{k^2}{4a^2}\left(x^ax^c\theta_c\wedge\theta_b + x_cx_b\theta^a\wedge\theta^c - s^2\theta^a\wedge\theta_b\right) \tag{71}$$

Teraz przypomnijmy, że

$$\mathrm{d}x^a = \frac{1+\frac{ks^2}{4}}{a}\theta^a \qquad \text{oraz} \qquad \mathrm{d}\theta^a = \frac{kx_b}{2a}\theta^a\wedge\theta^b - \frac{a'}{a}\theta^a\wedge\theta^3 \tag{72}$$

i wróćmy do (68):

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega^a{}_b &= -\frac{k}{2}\frac{a'}{a^2}\theta^3\wedge\left(x^a\theta_b - x_b\theta^a\right) + \frac{k}{2a}\left(\mathrm{d}x^a\theta_b - \mathrm{d}x_b\theta^a\right) + \frac{k}{2a}\left(x^a\mathrm{d}\theta_b - x_b\mathrm{d}\theta^a\right) = \\
&= \frac{ka'}{2a^2}\left(x^a\theta_b - x_b\theta^a\right)\wedge\theta^3 + \frac{k}{2a}\frac{1+\frac{ks^2}{4}}{a}\left(\theta^a\wedge\theta_b - \theta_b\wedge\theta^a\right) + \\
&\quad + \frac{k}{2a}\left[x^a\left(\frac{kx_c}{2a}\theta_b\wedge\theta^c - \frac{a'}{a}\theta_b\wedge\theta^3\right) - x_b\left(\frac{kx_c}{2a}\theta^a\wedge\theta^c - \frac{a'}{a}\theta^a\wedge\theta^3\right)\right] \\
&= \frac{ka'}{2a^2}\left(x^a\theta_b - x_b\theta^a\right)\wedge\theta^3 + \frac{k}{a^2}\theta^a\wedge\theta_b + \frac{k^2s^2}{4a^2}\theta^a\wedge\theta_b \\
&\quad - \frac{k}{2a^2}\left({}^a\theta_b - x_b\theta^a\right)\wedge\theta^3 + \frac{k^2}{4a^2}\left(x^ax^c\theta_b\wedge\theta_c - x_bx_c\theta^a\wedge\theta^c\right) = \\
&= \frac{k}{a^2}\theta^a\wedge\theta_b + \frac{k^2}{4a^2}\left(s^2\theta^a\wedge\theta_b - x^ax^c\theta_c\wedge\theta_b - x_bx_c\theta^a\wedge\theta^c\right) = \\
&= \frac{k}{a^2}\theta^a\wedge\theta_b - \omega^a{}_c\wedge\omega^c{}_b
\end{aligned} \tag{73}$$

Więc, zbierając wszystko razem:

$$\Omega^a{}_b = \mathrm{d}\omega^a{}_b + \omega^a{}_c\wedge\omega^c{}_b + \omega^a{}_3\wedge\omega^3{}_b = \frac{k}{a^2}\theta^a\wedge\theta_b - \omega^a{}_c\wedge\omega^c{}_b + \omega^a{}_c\wedge\omega^c{}_b + \frac{a'^2}{a^2}\theta^a\wedge\theta_b \tag{74}$$

Podsumowując dwuforma krzywizny dla tej metryki jest postaci:

$$\Omega^a{}_3 = -\frac{a''}{a}\theta^a\wedge\theta_3 \qquad\qquad \Omega^a{}_b = \frac{k+a'^2}{a^2}\theta^a\wedge\theta_b \tag{75}$$