

# Kollokwium z Ogólnej Teorii Względności II

31.03.2010

Za każde zadanie można otrzymać 5 punktów.

## 1. ZADANIE

**Fale pp**

Rozważmy metrykę postaci:

$$ds^2 = 2du(Hdu + dv) - 2d\xi d\bar{\xi} \quad (1)$$

gdzie  $\xi = x + iy$ , zaś  $H$  jest dowolną funkcją.

Nałożenie na tę metrykę próżniowych równań Einsteina prowadzi do nałożenia pewnych warunków na funkcję  $H$ . Znajdź te warunki.

*Wskazówka: Mi wygodnie było pracować w bazie form  $(\theta^\mu)_{\mu=0,1,2,3}$ , w której metryka jest postaci*

$$g = 2\theta^0 \otimes \theta^1 - 2\theta^2 \otimes \theta^3 \quad (2)$$

czyli

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

## Rozwiązanie

Jak zapowiedziałem, wprowadzam koreper

$$\theta^0 = du \quad \theta^1 = Hdu + dv \quad \theta^2 = d\xi \quad \theta^3 = d\bar{\xi} \quad (4)$$

Daje mi to następujące reguły podnoszenia i opuszczania wskaźników: podniesienie wskaźnika 0 zmienia go na 1 i odwrotnie, zaś podniesienie wskaźnika 2 zmienia go na 3 i dodaje czynnik  $-1$  (i odwrotnie).

Różniczki form bazowych:

$$d\theta^0 = d\theta^2 = d\theta^3 = 0 \quad (5)$$

$$d\theta^1 = H_v dv \wedge du + H_\xi d\xi \wedge du + H_{\bar{\xi}} d\bar{\xi} \wedge du \quad (6)$$

gdzie wprowadziłem notację pomijającą przecinki:  $H_a := \partial_a H = H_{,a}$ , a przez to oszczędzając czasu przy pisaniu. Warto zauważyć, że mnożenie zewnętrzne  $dv \wedge du$  można zastąpić mnożeniem przez całe  $\theta^1$ , gdyż składnik  $Hdu$  zostanie zabity przez  $du$ . Dostajemy więc:

$$d\theta^1 = H_v \theta^1 \wedge \theta^0 + H_\xi \theta^2 \wedge \theta^0 + H_{\bar{\xi}} \theta^3 \wedge \theta^0 \quad (7)$$

Skorzystamy z pierwszego równania strukturalnego oraz z beztorsyjności koneksji Levi-Civity:

$$D\theta^\mu = d\theta^\mu + \omega^\mu{}_\nu \wedge \theta^\nu = \Theta^\mu = 0 \quad (8)$$

Łatwo sprawdzić, że równania (5) i (7) są spełnione jednocześnie z (8), jeśli jedyne nieznikające komponenty koneksji to:

$$\omega^1{}_1 = H_v \theta^0 \quad \omega^1{}_2 = H_\xi \theta^0 \quad \omega^1{}_3 = H_{\bar{\xi}} \theta^0 \quad (9)$$

Znając koneksję można przystąpić do liczenia dwuformy krzywizny. Znów skorzystamy z równania strukturalnego, tym razem z drugiego:

$$\Omega^\mu{}_\nu = D\omega^\mu{}_\nu = d\omega^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\rho \wedge \omega^\rho{}_\nu \quad (10)$$

Można od razu zauważyć, że człon  $\omega \wedge \omega$  będzie nieistotny - jedyne nieznikające komponenty koneksji są bowiem proporcjonalne do tej samej formy  $\theta^0$ , zaś  $\eta \wedge \eta = 0$  dla jednoform. Co za tym idzie - jedyne nieznikające komponenty krzywizny pochodzą z różniczkowania jedynych nieznikających komponentów koneksji. Ponadto, dzięki  $d\theta^0 = 0$ , wystarczy różniczkować funkcję  $H$ . Ostatecznie dostajemy:

$$\Omega^1{}_1 = H_{vv}dv \wedge du + H_{v\xi}d\xi \wedge du + H_{v\bar{\xi}}d\bar{\xi} \wedge du \quad (11)$$

$$\Omega^1{}_2 = H_{\xi v}dv \wedge du + H_{\xi\xi}d\xi \wedge du + H_{\xi\bar{\xi}}d\bar{\xi} \wedge du \quad (12)$$

$$\Omega^1{}_3 = H_{\bar{\xi}v}dv \wedge du + H_{\bar{\xi}\xi}d\xi \wedge du + H_{\bar{\xi}\bar{\xi}}d\bar{\xi} \wedge du \quad (13)$$

Znowóż  $dv$  można zastąpić pełną formą  $\theta^1$ .

$$\begin{aligned} \Omega^1{}_1 &= H_{vv}\theta^1 \wedge \theta^0 + H_{v\xi}\theta^2 \wedge \theta^0 + H_{v\bar{\xi}}\theta^3 \wedge \theta^0 \\ \Omega^1{}_2 &= H_{\xi v}\theta^1 \wedge \theta^0 + H_{\xi\xi}\theta^2 \wedge \theta^0 + H_{\xi\bar{\xi}}\theta^3 \wedge \theta^0 \\ \Omega^1{}_3 &= H_{\bar{\xi}v}\theta^1 \wedge \theta^0 + H_{\bar{\xi}\xi}\theta^2 \wedge \theta^0 + H_{\bar{\xi}\bar{\xi}}\theta^3 \wedge \theta^0 \end{aligned} \quad (14)$$

Aby odzyskać z omegi elementy tensora Riemanna, można albo mieć intuicję, albo wyrobić ją sobie krótkim wyprowadzeniem:

$$\Omega^1{}_a = \frac{1}{2}R^1{}_{a\mu\nu}\theta^\mu \wedge \theta^\nu = \frac{1}{2}R^1{}_{a0\nu}\theta^0 \wedge \theta^\nu + \frac{1}{2}R^1{}_{ab\nu}\theta^b \wedge \theta^\nu = \quad (15)$$

$$= \frac{1}{2}R^1{}_{a00}\theta^0 \wedge \theta^0 + \frac{1}{2}R^1{}_{a0b}\theta^0 \wedge \theta^b + \frac{1}{2}R^1{}_{ab0}\theta^b \wedge \theta^0 + \frac{1}{2}R^1{}_{abc}\theta^b \wedge \theta^c = \quad (16)$$

$$= 0 + (-1)^2\frac{1}{2}R^1{}_{ab0}\theta^b \wedge \theta^0 + \frac{1}{2}R^1{}_{ab0}\theta^b \wedge \theta^0 + \text{u nas zero} = \quad (17)$$

$$= R^1{}_{ab0}\theta^b \wedge \theta^0 \quad (18)$$

Odczytujemy więc niezerowe elementy macierzowe tensora Riemanna:

$$\begin{aligned} R^1{}_{110} &= H_{vv} & R^1{}_{120} &= H_{v\xi} & R^1{}_{130} &= H_{v\bar{\xi}} \\ R^1{}_{210} &= H_{\xi v} & R^1{}_{220} &= H_{\xi\xi} & R^1{}_{230} &= H_{\xi\bar{\xi}} \\ R^1{}_{310} &= H_{\bar{\xi}v} & R^1{}_{320} &= H_{\bar{\xi}\xi} & R^1{}_{330} &= H_{\bar{\xi}\bar{\xi}} \end{aligned} \quad (19)$$

Zauważmy, że po obniżeniu pierwszego indeksu zamieni się on na zero. To ważna obserwacja: wszystkie nieznikające składowe tensora Riemanna mają dwa indeksy równe zero.

Spójrzmy teraz na tensor Ricciego. Jego elementy macierzowe  $R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}$ . Łatwo policzyć elementy  $R_{a0}$ :

$$R_{10} = H_{vv} \quad R_{20} = H_{\xi v} \quad R_{30} = H_{\bar{\xi}v} \quad (20)$$

Weźmy element macierzowy o dwóch indeksach niezerowych:

$$R_{ab} = R^\mu{}_{a\mu b} = R^0{}_{a0b} + R^1{}_{a1b} + R^C{}_{aCb} = R_{1a0b} + R_{0a1b} + R_{(5-C)aCb} \quad (21)$$

żaden ze składników sumy nie ma dwóch indeksów równych zero - a więc każdy ze składników sumy znika, czyli  $R_{ab} = 0$ . Pozostało jeszcze policzyć  $R_{00}$ :

$$R_{00} = R^0{}_{000} + R^1{}_{010} + R^2{}_{020} + R^3{}_{030} = 0 + R_{0010} - R_{3020} - R_{2030} = 0 + R_{0320} + R_{0230} = R^1{}_{320} + R^1{}_{230} = H_{\bar{\xi}\xi} + H_{\xi\bar{\xi}} \quad (22)$$

Zatem tensor Riemanna:

$$R_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} H_{\bar{\xi}\xi} + H_{\xi\bar{\xi}} & H_{vv} & H_{\xi v} & H_{\bar{\xi}v} \\ H_{vv} & 0 & 0 & 0 \\ H_{\xi v} & 0 & 0 & 0 \\ H_{\bar{\xi}v} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Próżniowe równania Einsteina sprowadzają się do postaci  $R_{\mu\nu} = 0$ . Daje nam to cztery równania:

$$H_{vv} = 0 \quad H_{\xi v} = 0 \quad H_{\bar{\xi}v} = 0 \quad H_{\bar{\xi}\xi} + H_{\xi\bar{\xi}} = 0 \quad (24)$$

Zakładam, że funkcja  $H$  jest różniczkowalna dwa razy, mogę więc zamieniać kolejność różniczkowania.

Pierwsze trzy równania można rozwiązać zakładając, że  $H_v = 0$ , czyli  $H$  nie zależy od  $v$ . Sprawdźmy, czy da się je spełnić bez tego założenia. Wówczas musiałyby zniknąć druga pochodna  $H$  po  $v$  oraz pierwsze pochodne  $H$  po  $\xi$  i  $\bar{\xi}$ , czyli funkcja  $H$  była by postaci

$$H = f(u)v \quad (25)$$

Jaką dałoby to metrykę?

$$ds^2 = 2vf(u)du^2 + 2dudv - 2d\xi d\bar{\xi} \quad (26)$$

Nie przeliczyłem tego, ale mam intuicję, że ta metryka jest izometryczna Minkowskiemu. Kto sprawdzi, może się podzielić wyprowadzeniem.

No dobrze. Jeśli natomiast założyć, że  $H_v = 0$ , to spełnione mamy trzy równania, ale zostało jeszcze czwarte. Dzięki zamianie kolejności różniczkowania sprowadza się ono do  $H_{\xi\bar{\xi}} = 0$ . Czyli albo  $H$  nie zależy od  $\xi$ , albo od  $\bar{\xi}$ . Zmienne te można z sobą zamieniać, dlatego zakładamy, że  $H$  nie zależy od  $\bar{\xi}$ . Znaczy to, że  $H$  jest funkcją holomorficzną zmiennej  $\xi$  (a dokładniej - rzeczywistą częścią funkcji holomorficzej).

Ostatecznie więc mamy następujące warunki:

$$H = \Re(H(u, \xi)) \quad (27)$$

gdzie zależność od  $u$  jest dowolna, a zależność od  $\xi$  holomorficzna.

## 2. ZADANIE

### Pochodna Liego

Dana jest baza jednoform  $\theta^\mu$  oraz dualnych do nich pól wektorowych  $X_\nu$ . Stałe struktury są znane i wynoszą  $c_{\nu\rho}^\mu$ , tzn.:

$$d\theta^\mu = c_{\nu\rho}^\mu \theta^\nu \wedge \theta^\rho \quad (28)$$

Dane jest też pole tensorowe  $T = T_{\mu\nu}\theta^\mu \otimes \theta^\nu$  oraz pole wektorowe  $Y$ .

Pochodna Liego tensora  $T$  jest również tensorem:

$$\mathcal{L}_Y T = S_{\mu\nu}\theta^\mu \otimes \theta^\nu \quad (29)$$

Znaleźć współczynniki  $S_{\mu\nu}$ .

### Rozwiązanie

Zacznijmy od przywołania kilku wzorów. Po pierwsze: pochodna Liego spełnia regułę Leibniza ze względu na mnożenie tensorowe:

$$\mathcal{L}_X A \otimes B = ({}_X A) \otimes B + A \otimes ({}_X B) \quad (30)$$

Po drugie pochodna Liego funkcji to po prostu działanie wektorem na funkcję:

$$\mathcal{L}_X f = X(f) \quad (31)$$

Po trzecie pochodna Liego formy różniczkowej to (anty)komutator pochodnej zewnętrznej  $d$  i zwężenia  $\iota_X^*$ :

$$\mathcal{L}_X \eta = \iota_X (d\eta) + d(\iota_X \eta) \quad (32)$$

dla jednoformy sprowadza się do

$$\mathcal{L}_X \eta = d\eta(X, \cdot) + d\eta(X) \quad (33)$$

Równanie (33) można wyprowadzić z (30), (31) oraz z działania pochodnej Liego na wektory:

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y] \quad (34)$$

i wiedzy, jak pochodna Liego zachowuje się przy braniu śladu (a ślad to sumowanie, więc różniczkowanie komutuje). Jest to prosty rachunek, który robiliśmy na ćwiczeniach.

Znając te podstawy możemy przejść do zadania. Stosujemy najpierw regułę Leibniza:

$$\mathcal{L}_Y T = (Y T_{\mu\nu}) \theta^\mu \otimes \theta^\nu + T_{\mu\nu} (Y \theta^\mu) \otimes \theta^\nu + T_{\mu\nu} \theta^\mu \otimes (Y \theta^\nu) \quad (35)$$

Z (31) znamy pierwszy człon:  $\mathcal{L}_Y T_{\mu\nu} = Y(T_{\mu\nu})$ . Musimy więc tylko nauczyć się różniczkować formy  $\theta^\alpha$ :

$$\mathcal{L}_Y \theta^\alpha = \iota_Y d\theta^\alpha + d(\theta^\alpha(Y)) = \iota_Y c_{\beta\gamma}^\alpha \theta^\beta \wedge \theta^\gamma + d(Y^\alpha) = c_{\beta\gamma}^\alpha \theta^\beta \wedge \theta^\gamma(Y, \cdot) + d(Y^\alpha) \quad (36)$$

gdzie  $Y^\alpha := \theta^\alpha(Y)$ . Liczymy różniczkę korzystając z wzoru

$$df = X_\alpha(f) \theta^\alpha \quad (37)$$

oraz kontrakcję, korzystając z wzoru

$$\eta \wedge \omega(A, \cdot) = \eta(A) \omega - \omega(A) \eta \quad (38)$$

i pamiętając, że stałe struktury  $c_{\beta\gamma}^\alpha$  są antysymetryczne w dolnych wskaźnikach. Dostajemy:

$$\mathcal{L}_Y \theta^\alpha = c_{\beta\gamma}^\alpha Y^\beta \theta^\gamma - c_{\gamma\beta}^\alpha Y^\gamma \theta^\beta + X_\delta(Y^\alpha) \theta^\delta = (2c_{\beta\gamma}^\alpha Y^\beta + X_\gamma(Y^\alpha)) \theta^\gamma \quad (39)$$

Pozostaje tylko wstawić (39) do (35) i uporządkować wskaźniki:

$$\mathcal{L}_Y T = Y(T_{\mu\nu}) \theta^\mu \otimes \theta^\nu + T_{\mu\nu} (2c_{\beta\gamma}^\mu Y^\beta + X_\gamma(Y^\mu)) \theta^\gamma \otimes \theta^\nu + T_{\mu\nu} \theta^\mu \otimes (2c_{\beta\gamma}^\nu Y^\beta + X_\gamma(Y^\nu)) \theta^\gamma \quad (40)$$

$$= Y(T_{\mu\nu}) \theta^\mu \otimes \theta^\nu + T_{\gamma\nu} (2c_{\beta\mu}^\gamma Y^\beta + X_\mu(Y^\gamma)) \theta^\mu \otimes \theta^\nu + T_{\mu\gamma} \theta^\mu \otimes (2c_{\beta\nu}^\gamma Y^\beta + X_\nu(Y^\gamma)) \theta^\nu \quad (41)$$

I ostatecznie, wyciągając formy przed nawias, dostajemy:

$$S_{\mu\nu} = Y(T_{\mu\nu}) + T_{\gamma\nu} (2c_{\beta\mu}^\gamma Y^\beta + X_\mu(Y^\gamma)) + T_{\mu\gamma} (2c_{\beta\nu}^\gamma Y^\beta + X_\nu(Y^\gamma)) \quad (42)$$

---

\*Nie umiałem znaleźć L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-owego symbolu, z którym mi się kojarzy zwężenie, czyli odwróconego  $\lrcorner$ . Jakby ktoś wiedział, gdzie go szukać, to będę wdzięczny za informację.