

Model gwiazdy politropowej

03.03.2010

1. CEL ZAJĘĆ

Chciałbym, abyśmy na tych ćwiczeniach wyprowadzili model sferycznie symetrycznej gwiazdy politropowej. Nazwa „gwiazda politropowa” pochodzi od równania stanu, jakie przyjmuje się dla materii w tej gwiazdzie: przyjmuje się potęgową zależność ciśnienia o gęstości

$$p = \rho^a \quad (1)$$

gdzie a to dowolna liczba (niekoniecznie całkowita).

Do problemu podejmiemy w następujących krokach:

- Przeanalizujemy symetrie układu i założymy pewną postać metryki.
- Dla założonej postaci metryki znajdziemy tensor Ricciego.
- Podzielimy myślowo czasoprzestrzeń na „wnętrze” i „zewnątrze” gwiazdy. W każdym obszarze wypiszemy tensor energii-pędu i znajdziemy rozwiązanie równań Einsteina.
- Nałożymy warunki zszycia na otrzymane rozwiązania.
- Zaproponujemy fizyczną interpretację stałych, które się pojawią podczas rozwiązywania zadania.

Poproszę was o przeprowadzenie części tych rachunków samodzielnie w domu.

Komu w drogę, temu do dzieła

2. ANALIZA SYMETRII UKŁADU

Rozważany układ to sferycznie symetryczna gwiazda. Sferyczna co oznacza - każdy widzi. Słowo „gwiazda” natomiast sugeruje, że układ jest stabilny, stacjonarny. Gwiazda bowiem zasadniczo nie zmienia się w czasie (tzn. mamy przepływ energii, świecenie gwiazdy, ale w tym modelu to pomijamy). Wniosek stąd, że istnieje czasowy wektor Killinga.

Z istnienia czasowego wektora Killinga wynika (*czy to jasne?*) istnienie foliacji całej czasoprzestrzeni na identyczne, trójwymiarowe, przestrzenne powierzchnie (Cauchy’ego) Σ , w każdym punkcie prostopadłe do tego wektora. Możemy więc wybrać współrzędne tak, aby współrzędna t była parametrem afinicznym pola Killinga. Zatem metryka musi być postaci

$$ds^2 = e^{2A(x)} dt^2 - d^2\Sigma(x) \quad (2)$$

gdzie A jest pewną funkcją współrzędnych przestrzennych, zaś $d^2\Sigma$ to metryka na powierzchniach stałego czasu.

Ze sferycznej symetrii układu wynika z kolei postać metryki na powierzchniach Cauchy’ego. Da się wybrać współrzędne tak, aby była ona postaci

$$d^2\Sigma = e^{2B(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3)$$

Wynika z tego także, że funkcja A musi zależeć wyłącznie od współrzędnej r (*czy to wszystko jasne?*).

Ostatecznie więc sferycznie symetryczna, stacjonarna metryka jest postaci

$$ds^2 = e^{2A(r)} dt^2 - e^{2B(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (4)$$

3. OBLICZENIE TENSORA RIEMANNA DLA SFERYCZNIE SYMETRYCZNEJ, STACJONARNEJ METRYKI

To część ćwiczeń, którą prosiłbym, abyście przeliczyli w domu.

Znając metrykę (4) wprowadźmy ortonormalny korepper:

$$\theta^0 = e^A dt \quad \theta^1 = e^B dr \quad \theta^2 = r d\theta \quad \theta^3 = r \sin \theta d\phi \quad (5)$$

Przy takim wyborze form bazowych metryka jest postaci

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu} \theta^\mu \theta^\nu \quad (6)$$

gdzie $\eta = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$. W takiej metryce forma koneksji Levi-Civity jest antysymetryczna (po obniżeniu indeksów):

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} \quad (7)$$

Korzystając z I równania strukturalnego można obliczyć formę koneksji (wiedząc oczywiście, że koneksja Levi-Civity jest beztorsyjna):

$$D\theta^\mu = \Theta^\mu = 0 = d\theta^\mu + \omega^\mu{}_\nu \wedge \theta^\nu \quad (8)$$

Równania (8) pozwalają wyliczyć elementy macierzowe $\omega_{\mu\nu}$. Następnie, dzięki drugiemu równaniu strukturalnemu, możemy znając koneksję obliczyć krzywiznę:

$$\Omega_{\mu\nu} := D\omega_{\mu\nu} = d\omega_{\mu\nu} + \omega_\mu{}^\kappa \wedge \omega_{\kappa\nu} \quad (9)$$

Znając zaś formę krzywizny można obliczyć tensor Riemanna, korzystając z równości

$$\Omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2} R_{\mu\nu\alpha\beta} \theta^\alpha \wedge \theta^\beta \quad (10)$$

Dalej, z tensora Riemanna obliczamy tensor Ricciego:

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu} \quad (11)$$

I skalar Ricciego

$$R = R^\mu{}_\mu \quad (12)$$

Prosiłbym Was o przeprowadzenie tych kroków. Łatwo sprawdzić, czy otrzymało się właściwy wynik, podstawiając go do próżniowych równań Einsteina $R_{\mu\nu} = 0$ i sprawdzając, czy rozwiązaniem jest czasoprzestrzeń Schwarzschilda.

4. CO DALEJ, CZYLI CO ZROBIMY NA ĆWICZENIACH

Ćwiczenia chciałbym zacząć zakładając znajomość postaci tensora Ricciego. Wtedy wyprowadzilibyśmy tensor energii-pędu dla materii wewnątrz gwiazdy i rozwiązalibyśmy równania Einsteina w tym obszarze. Na zewnątrz gwiazdy rozwiązaniem będzie czasoprzestrzeń Schwarzschilda.

Następnie zszylibyśmy te dwa rozwiązania wiążąc promień Schwarzschilda geometrii zewnętrznej z parametrami geometrii wewnętrznej. Następnym krokiem będzie zinterpretowanie wolnych parametrów geometrii wewnętrznej (o ile dobrze pamiętam są to gęstość w centrum gwiazdy oraz całkowita masa, ale to jeszcze zobaczymy).

Pozdrawiam i do usłyszenia w środę, o 9:00 !

JP