Zadania domowe z Matematyki II L

SERIA 1

1 DZIAŁANIA ALGEBRAICZNE NA MACIERZACH

1. Która z podanych macierzy jest: a) ortogonalna, b) unitarna, c) normalna?

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ -4i & 4-3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 17 & -8 & a+4 \\ -8 & 17 & -4 \\ a+4 & -4 & 11 \end{pmatrix}.$$

2. Niech $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   a) Wyznaczyć następujące macierze:[1] $[A,B]$, $[C,A]$, $[B,C]$.

   b) Sprawdzić, że zachodzi tzw. *tożsamość Jacobiego* $[[A,B],C] + [[C,A],B] + [[B,C],A] = \mathbb{0}$.

3. Macierze

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   nazywane są macierzami Pauliego. Obliczyć:

$$\text{a) } (\sigma^i)^2, \qquad \text{b) } [\sigma^i, \sigma^j], \qquad \text{c) } \{\sigma^i, \sigma^j\},$$

   gdzie $i, j = 1, 2, 3$.

4. Obliczyć $(BA^*)^{\mathrm{T}} + iW^{\mathrm{T}}W\mathbb{1}_4$ dla następujących macierzy:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-i}{\sqrt[3]{5}} & 1 & 2 \\ \pi & 2 & 2 & 1 \\ i & 3 & -11 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & (i-4)^{-2} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sqrt{2}i & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i^3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 WYZNACZNIKI

1. Obliczyć wyznaczniki

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix}.$$

2. Rozwiązać równania:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ -1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{b) } \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & x \\ 1 & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix}.$$

3 ODWRACANIE MACIERZY

1. Obliczyć F^{-2} jeśli

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

[1] $[A,B] = AB - BA$, $[[A,B],C] = [A,B]C - C[A,B]$

2. Znaleźć macierze odwrotne do poniższych macierzy

$$
\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 10 & 8 & -3 \\ -6 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.
$$

3. Pokazać, że jeśli $ad - bc \neq 0$ to macierz odwrotna do macierzy

$$
F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}
$$

ma postać

$$
F^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.
$$

4. Pokazać, że jeśli macierz F spełnia $F^2 + F = \mathbb{1}$, to jest odwracalna.