Informacja Kwantowa 1/2

Seria 2

do oddania na 24.10.2018

Otrzymujemy qubit przygotowany w jednym z dwóch nieortogonalnych stanów

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \qquad |\chi\rangle = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

z prawdopodobieństwami odpowiednio p oraz $1-p$. Qubit mierzymy za pomocą urządzenia, które posiada dwa możliwe wyniki pomiarów odpowiadające identyfikacji stanów $|\psi\rangle$ oraz $|\chi\rangle$ i opisane jest parą dodatnio określonych operatorów $\hat{M}_\psi, \hat{M}_\chi \geq 0$, gdzie $\hat{M}_\psi + \hat{M}_\chi = \hat{\mathbb{1}}$. Za poprawną identyfikację stanu zyskujemy 1€, natomiast za błędną tracimy 1€.

a) Pokazać, że wyrażenie na średni zysk P w grze można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \mathsf{P} &= p\big(\langle\psi|\hat{M}_\psi|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{M}_\chi|\psi\rangle\big) + (1-p)\big(\langle\chi|\hat{M}_\chi|\chi\rangle - \langle\chi|\hat{M}_\psi|\chi\rangle\big) \\ &= \mathrm{Tr}[\hat{\Delta}\hat{M}_\psi] + D, \end{aligned}$$

gdzie operator $\hat{\Delta}$ i stała D zależą od stanow $|\psi\rangle$ i $|\chi\rangle$ oraz prawdopodobieństwa p.

b) Rozważyć rozkład operatora $\hat{\Delta}$ na wartości własne i znormalizowane wektory własne:

$$\hat{\Delta} = \lambda_1|u_1\rangle\langle u_1| + \lambda_1|u_1\rangle\langle u_1|$$

i przedyskutować, jak wybór operatora $\hat{M}_\psi$ maksymalizujący P zależy od znaków wartości własnych λ_1, λ_2.

c) Obliczyć maksymalną wartość P dla stanów $|\psi\rangle$ i $|\chi\rangle$ przygotowywanych z prawdopodobieństwami p oraz $1-p$.