Informacja Kwantowa 1/2

Seria 6

do oddania na 21.11.2018

Rozważmy ogólny stan (mieszany) *trzech* qubitów (oznaczonych A, B i C):

$$\rho = \sum_{i,i',j,j',k,k'=0}^{1} \rho_{i'j'k'}^{ijk} \; |ijk\rangle_{\mathrm{ABC}} \langle i'j'k'| = \sum_{i,i',j,j',k,k'=0}^{1} \rho_{i'j'k'}^{ijk} \; |i\rangle_{\mathrm{A}} \langle i'| \otimes |j\rangle_{\mathrm{B}} \langle j'| \otimes |k\rangle_{\mathrm{C}} \langle k'| \tag{1}$$

a) Posługując się powyższą parametryzacją udowodnij, że

$$\rho^{T_{\mathrm{B}}} = \left(\left(\rho^{T_{\mathrm{A}}} \right)^{T_{\mathrm{C}}} \right)^{T}, \tag{2}$$

gdzie $(\ldots)^{T_{\mathrm{X}}}$ oznacza *transpozycję częściową* podsystemu (qubitu) $\mathrm{X} = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\,\mathrm{lub}\,\mathrm{C}\}$, a $(\ldots)^{T}$ jest transpozycją całej macierzy gęstości.

b) Napisz explicite macierz gęstości trzy-qubitowego stanu ($|0\rangle \equiv |\leftrightarrow\rangle$, $|1\rangle \equiv |\updownarrow\rangle$):

$$\rho_\nu = \frac{\nu}{2} \left(|\Psi_-\rangle_{\mathrm{AB}} \langle \Psi_-| \otimes |0\rangle_{\mathrm{C}} \langle 0| + |0\rangle_{\mathrm{A}} \langle 0| \otimes |\Psi_-\rangle_{\mathrm{BC}} \langle \Psi_-| \right) \; + \; \frac{1-\nu}{8} \mathbb{1}_{\mathrm{ABC}} \tag{3}$$

w bazie naturalnej ($\{|000\rangle, |001\rangle, |010\rangle, \ldots, |111\rangle\}$), gdzie $|\Psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - |10\rangle)$ ($\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|\leftrightarrow\updownarrow\rangle - |\updownarrow\leftrightarrow\rangle)$), a parametr $0 \leq \nu \leq 1$ odpowiada za udział stanu *maksymalnie zmiesznanym* (podobnie jak w przypadku dwóch qubitów w stanie Wernera na wykładzie).

c) Dokonaj odpowiednio częściowej transpozycji otrzymanej macierzy gęstości by znaleźć macierze $\rho_\nu^{T_{\mathrm{A}}}$, $\rho_\nu^{T_{\mathrm{B}}}$ i $\rho_\nu^{T_{\mathrm{C}}}$.

d) Znajdź *najmniejsze wartości własne*, $\lambda_{\min}$, powyższych macierzy:

$$\lambda_{\min}(\rho_\nu^{T_{\mathrm{A}}}) = \frac{1}{8}(1 - 3\nu), \tag{4}$$

$$\lambda_{\min}(\rho_\nu^{T_{\mathrm{B}}}) = \frac{1}{8}\left(1 - \left(2\sqrt{2} + 1\right)\nu\right), \tag{5}$$

$$\lambda_{\min}(\rho_\nu^{T_{\mathrm{C}}}) = \frac{1}{8}(1 - 3\nu). \tag{6}$$

e) Rozważając dla jakich zakresów ν powyższe wartości własne stają się ujemne, podaj kiedy możemy *być pewni*, że:

(a) wszystkie qubity (A, B i C) są splątane.

(b) qubit B na pewno jest splątany z qubitami A i C traktowanymi łącznie (jako jeden czterowymiarowy system).