Informacja Kwantowa 1/2

Seria 7

do oddania na 05.12.2018

Zadanie 1

a) Pokaż, że trzyqubitowy czysty stan $(\alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle) \otimes |\Psi_-\rangle$ zawsze można zapisać jako

$$\frac{1}{2}\left[-|\Psi_-\rangle \otimes (\alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle) - |\Psi_+\rangle \otimes (\alpha_0 |0\rangle - \alpha_1 |1\rangle) + \right. \tag{1}$$

$$\left. + |\Phi_-\rangle \otimes (\alpha_0 |1\rangle + \alpha_1 |0\rangle) + |\Phi_+\rangle \otimes (\alpha_0 |1\rangle - \alpha_1 |0\rangle)\right], \tag{2}$$

gdzie $|\Psi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle)$, $|\Phi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle)$ to odpowiednio stany Bella.

b) Alicja chcę przeteleportować stan $|\psi >= \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle$ do Bob, z którym współdzieli stan $|\Phi\rangle_+$. Jak powinien przebiagać protokół teleportacji?

Podpowiedź: Zauważ, że $(\hat{\sigma}_2 \otimes \mathbb{1}) |\Phi_+\rangle = \mathrm{i} |\Psi_-\rangle$ (jak w protokole "*dense coding*" z wykładu).

Zadanie 2

Rozważmy stan czysty dwóch qubitów postaci

$$|\Psi\rangle_{AB} = \frac{1}{4}\Big((1+\sqrt{3})|00\rangle + \mathrm{i}(1-\sqrt{3})|01\rangle + (1-\sqrt{3})|10\rangle + \mathrm{i}(1+\sqrt{3})|11\rangle\Big) \tag{3}$$

a) Dokonaj *rozkładu Schmidta* $|\Psi\rangle_{AB}$:

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i |e_i\rangle_A |f_i\rangle_B , \tag{4}$$

podając *współczynniki Schmidta,* λ_i, i wektory bazowe $\{|e_i\rangle_A\}$, $\{|f_i\rangle_B\}$ dla, odpowiednio, pierwszego qubitu (A) i drugiego qubitu (B) . Czy $|\Psi\rangle_{AB}$ to stan *maksymalnie splątany*?

b) Oblicz macierz gęstości, $\rho = |\Psi\rangle_{AB}\langle\Psi|$, stanu (3). Dokonaj jej częściowej transpozycji, ρ^{T_A}, po pierwszym qubicie (A). Wykaż, że otrzymana macierz jest zgodna z rozkładem Schmidta (4), bo

$$\rho^{T_A} = \left(\sum_{i,j=1}^{r} \lambda_i\lambda_j |e_i\rangle_A\langle e_j| \otimes |f_i\rangle_B\langle f_j|\right)^{T_A} = \sum_{i,j=1}^{r} \lambda_i\lambda_j |e_j\rangle_A\langle e_i| \otimes |f_i\rangle_B\langle f_j| . \tag{5}$$

Pokaż, że jest to macierz ujemna, co potwierdza że $|\Psi\rangle_{AB}$ jest splątany.

Podpowiedź: Nie musisz dokonywać rozkładu spektralnego ρ^{T_A}! Wystarczy, że podasz jakiś stan dwuqubitowy $|\Phi\rangle$ taki, że $\langle\Phi| \rho^{T_A} |\Phi\rangle < 0$, np., $|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathrm{i}|01\rangle + |10\rangle)$;-).

c) Znajdź *macierze zredukowane* pierwszego i drugiego qubitu, $\rho_A = \mathrm{Tr}_B\{\rho\}$ i $\rho_B = \mathrm{Tr}_A\{\rho\}$, i pokaż, że mają te same wartości własne μ_1 i μ_2.

d) Czy to przypadek, że $\mu_1 = \lambda_1^2$ i $\mu_2 = \lambda_2^2$?
Pokaż, że dla dowolnego $|\Psi\rangle_{AB}$ z rozkładem Schmidta (4), ślad częściowy $\mathrm{Tr}_X\{|\Psi\rangle_{AB}\langle\Psi|\}$ (gdzie $X = \{A, B\}$) daje odpowiednio:

$$\rho_A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2 |e_i\rangle_A\langle e_i| \qquad \text{i} \qquad \rho_B = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2 |f_i\rangle_B\langle f_i| \tag{6}$$