Informacja Kwantowa 1/2

Seria przygotowawcza do egzaminu

Zadanie 1 Otrzymujemy qubit przygotowany w jednym z dwóch nieortogonalnych stanów ($0 \leq \theta \leq \pi/2$)

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \qquad |\chi\rangle = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

z prawdopodobieństwami p i $1-p$. Qubit mierzymy za pomocą urządzenia pomiarowego, które pozwala na *jednoznaczną identyfikację* tych stanów, czyli posiada trzy możliwe wyniki odpowiadające operatorom $\hat{M}_\psi, \hat{M}_\chi, \hat{M}_? \geq 0$ spełniającym warunek $\hat{M}_\psi + \hat{M}_\chi + \hat{M}_? = \hat{\mathbb{1}}$. Operatory $\hat{M}_\psi$ i $\hat{M}_\chi$ odpowiadają bezbłędnej identyfikacji stanów, odpowiednio, $|\psi\rangle$ oraz $|\chi\rangle$, co oznacza, że:

$$\langle\chi|\hat{M}_\psi|\chi\rangle = \langle\psi|\hat{M}_\chi|\psi\rangle = 0,$$

Operator $\hat{M}_?$ odpowiada natomiast wynikowi '?' oznaczającemu, że identyfikacja nie powiodła się.

a) Pokaż, że operatory pomiarowe identyfikujące stany $|\psi\rangle$ i $|\chi\rangle$ możemy w ogólności zapisać za pomocą stanów do nich ortogonalnych jako $\hat{M}_\psi = \lambda_\psi|\chi^\perp\rangle\langle\chi^\perp|$ i $\hat{M}_\chi = \lambda_\chi|\psi^\perp\rangle\langle\psi^\perp|$, gdzie $\lambda_\psi, \lambda_\chi \geq 0$ i

$$|\psi^\perp\rangle = \begin{pmatrix} -\cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \qquad |\chi^\perp\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

b) Sprawdź jakie maksymalne wartości mogą przyjmować parametry $\lambda_\psi, \lambda_\chi \geq 0$ tak żeby warunek $\hat{M}_? = \hat{\mathbb{1}} - \hat{M}_\psi - \hat{M}_\chi \geq 0$ był spełniony.

c) Znajdź optymalne wartości parametrów $\lambda_\psi, \lambda_\chi \geq 0$ w funkcji p i θ, poprzez minimalizację średniego prawdopodobieństwa wyniku "?":

$$P_? = \mathrm{Tr}\left\{\hat{M}_?\left(p|\psi\rangle\langle\psi| + (1-p)|\chi\rangle\langle\chi|\right)\right\}.$$

Podaj otrzymaną optymalną wartość $P_?$, ale też odpowiadające jej maksymalne prawdopodobieństwa identyfikacji stanów $P_\psi = p\langle\psi|\hat{M}_\psi|\psi\rangle$ i $P_\chi = (1-p)\langle\chi|\hat{M}_\chi|\chi\rangle$.

d) Alicja koduje informacje klasyczną używając powyższych nieortogonalnych stanów $|\psi\rangle$ i $|\chi\rangle$, wysyłając je z prawdopodobieństwami p i $1-p$ do Boba. Bob wykonuje powyższy pomiar minimalizujący $P_?$. Znaleźć informację wzajemną $I(X:Y)$, gdzie X to zmienna losowa oznaczająca stan wybrany przez Alicję, a Y opisuje wynik pomiaru u Boba.

Zadanie 2 Alicja dzieli z Bobem i Charlie po parze qubitów opisanych stanami $|\Psi\rangle_{AB}$ oraz $|\Psi\rangle_{A'C}$, gdzie

$$|\Psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|00\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|11\rangle,$$

przy czym $\leq \theta \leq \pi/2$.

a) Znaleźć stany warunkowe qubitów Boba i Charliego BC, gdy Alicja wykonała pomiar swoich qubitów w bazie Bella $\{|\Phi_\pm\rangle_{AA'}, |\Psi_\pm\rangle_{AA'}\}$.

b) Podać prawdopodobieństwa otrzymania poszczególnych wyników i odpowiadające im *znormalizowane* stany warunkowe qubitów BC.

Zadanie 3 Rozważ sytuację, kiedy Alicja i Bob dzielą pomiędzy sobą stan *niemaksymalnie splątany*:

$$|\Psi_\lambda\rangle = \sqrt{\lambda}|01\rangle - \sqrt{1-\lambda}|10\rangle,$$

gdzie $0 \leq \lambda \leq 1$. Dla $\lambda = 0, 1$ jest to stan separowalny, natomiast dla $\lambda = 1/2$ Alicja i Bob są w posiadaniu stanu Bella $|\Psi_-\rangle$. Wielkość CHSH używana do łamania nierówności Bella wynosi

$$\langle C\rangle = C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + C(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + C(\mathbf{a}', \mathbf{b}) - C(\mathbf{a}', \mathbf{b}'),$$

i wyrażona jest przez funkcję korelacji:

$$C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = p(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - p(-\mathbf{a}, \mathbf{b}) - p(\mathbf{a}, -\mathbf{b}) + p(-\mathbf{a}, -\mathbf{b}),$$

gdzie $p(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ to prawdopodobieństwo zmierzenia przez Alicję i Boba swoich qubitów w stanach opisanych przez wektory $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ w reprezentacji Blocha, i.e.:

$$p(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left|\left(\langle\mathbf{a}| \otimes \langle\mathbf{b}|\right)|\Psi_\lambda\rangle\right|^2.$$

a) Pokaż, że $\langle C\rangle$ przyjmuje maksymalną wartość $2\sqrt{2}$, kiedy Alicja i Bob są w posiadaniu stanu maksymalnie splątanego ($\lambda = 1/2$) i wykonują pomiary:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b) Zastosuj ten sam zestaw pomiarów w przypadku kiedy Alicja i Bob posiadają ogólny stan niemaksymalnie splątany, $|\Psi_\lambda\rangle$, i oblicz wielkość $\langle C\rangle$ jako funkcję λ.

c) Dla jakich wartości λ w powyższym przypadku występuje łamanie nierówności Bella.

Zadanie 4 Rozważmy dwie operacje kwantowe zadane operatorami Krausa:

$$\Lambda_1: \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\sigma}_1, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\sigma}_2, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\sigma}_3.$$

oraz

$$\Lambda_2: \quad \frac{1}{\sqrt{3}}|\leftrightarrow\rangle\langle\updownarrow|, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}|\updownarrow\rangle\langle\leftrightarrow|, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}|\swarrow\!\!\!\nearrow\rangle\langle\nwarrow\!\!\!\searrow|, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}|\nwarrow\!\!\!\searrow\rangle\langle\swarrow\!\!\!\nearrow|, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}|\circlearrowleft\rangle\langle\circlearrowright|, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}|\circlearrowright\rangle\langle\circlearrowleft|.$$

Znaleźć transformację wektora Blocha w obydwu przypadkach oraz indukowane przez te operacje pomiary kwantowe. Czy z wyniku pomiarów otrzymujemy nietrywialną informację o stanie wejściowym?

Zadanie 5 Rozważmy rodzinę stanów dwuqubitowych postaci

$$\hat{\varrho} = \frac{1}{4}(\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}} - \eta_1\hat{\sigma}_1 \otimes \hat{\sigma}_1 - \eta_2\hat{\sigma}_2 \otimes \hat{\sigma}_2 - \eta_3\hat{\sigma}_3 \otimes \hat{\sigma}_3).$$

Korzystając z kryterium częściowej transpozycji znaleźć bryłę geometryczną tworzoną przez trójki parametrów (η_1, η_2, η_3), dla których stan $\hat{\varrho}$ jest separowalny.