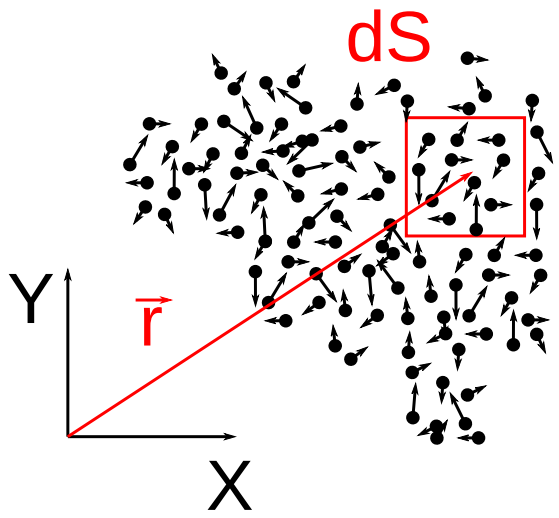
Neutronika
semestr letni 2024/25

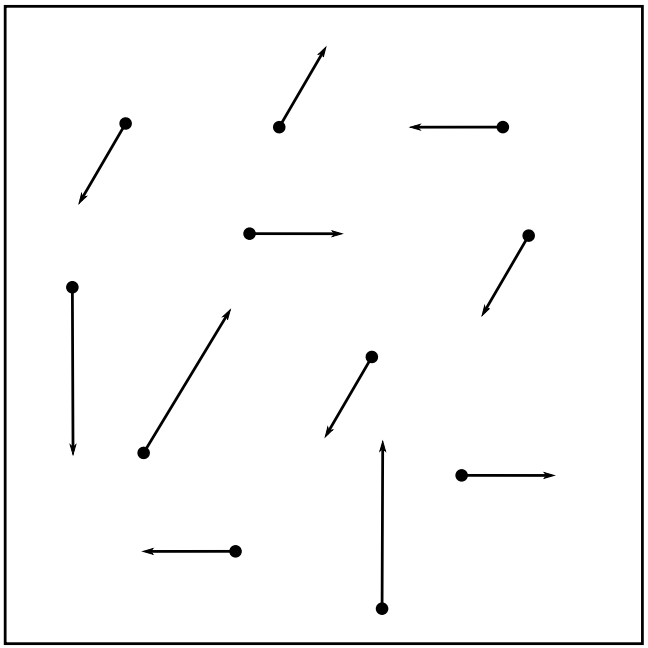
Krzysztof Miernik

Strumień neutronów



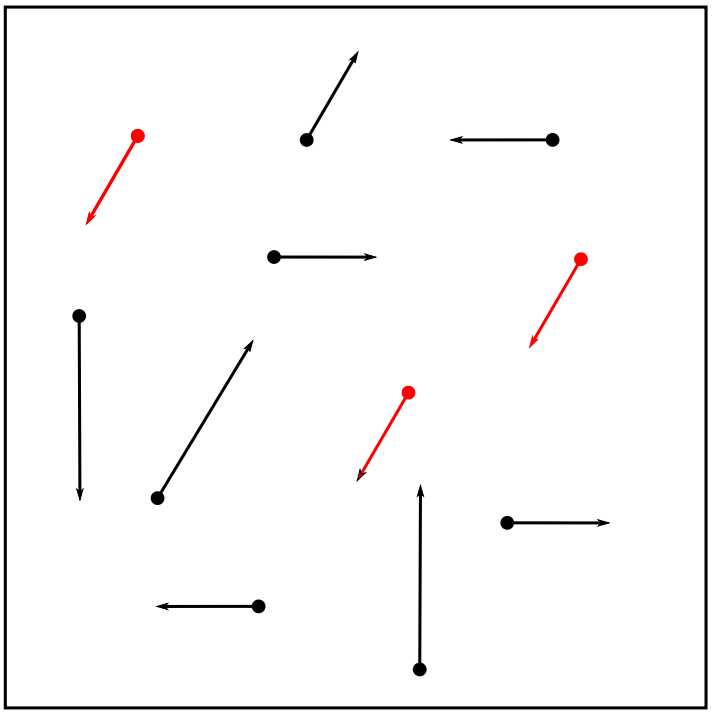
Neutrony w elemencie objętości

Strumień neutronów



Neutrony w elemencie objętości

Strumień neutronów



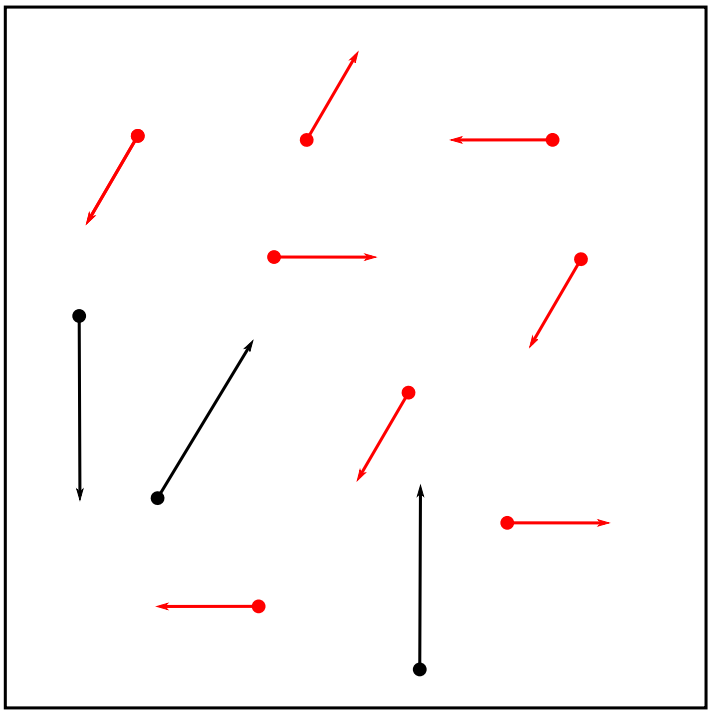
Ω =

E = = 1

Φ(r, E, Ω)= 3

Suma wszystkich strzałek o tej samej długości (energii) i kierunku to kątowy strumień neutronów - $\Phi(r, E, \Omega)$

Strumień neutronów



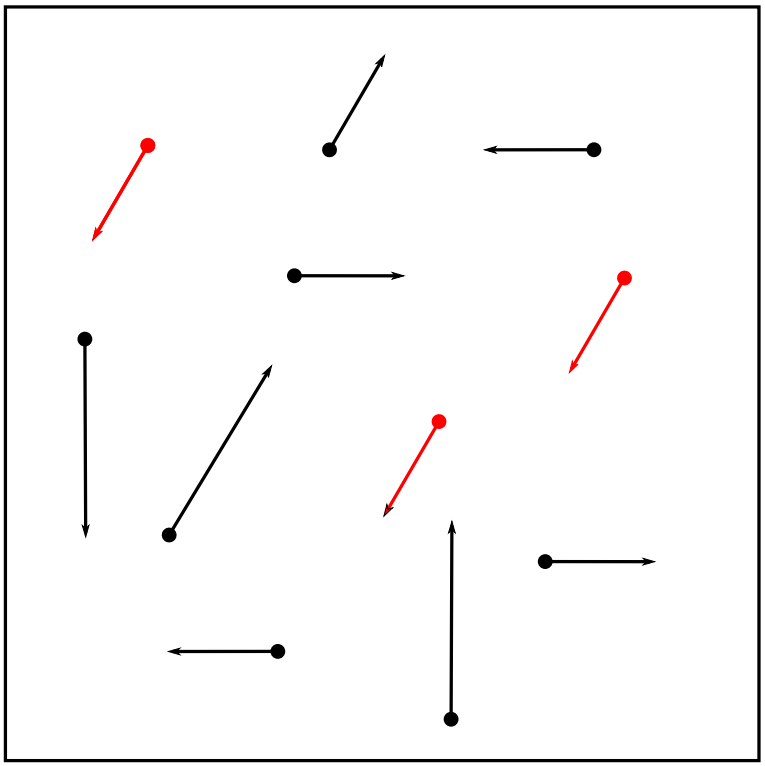
$\int d\Omega$

E = ⟶ = 1

$\Phi(r, E) = 8$

Suma wszystkich strzałek o tej samej długości niezależnie od ich kierunku to całkowity strumień neutronów o energii E - $\Phi(r, E)$

Strumień neutronów



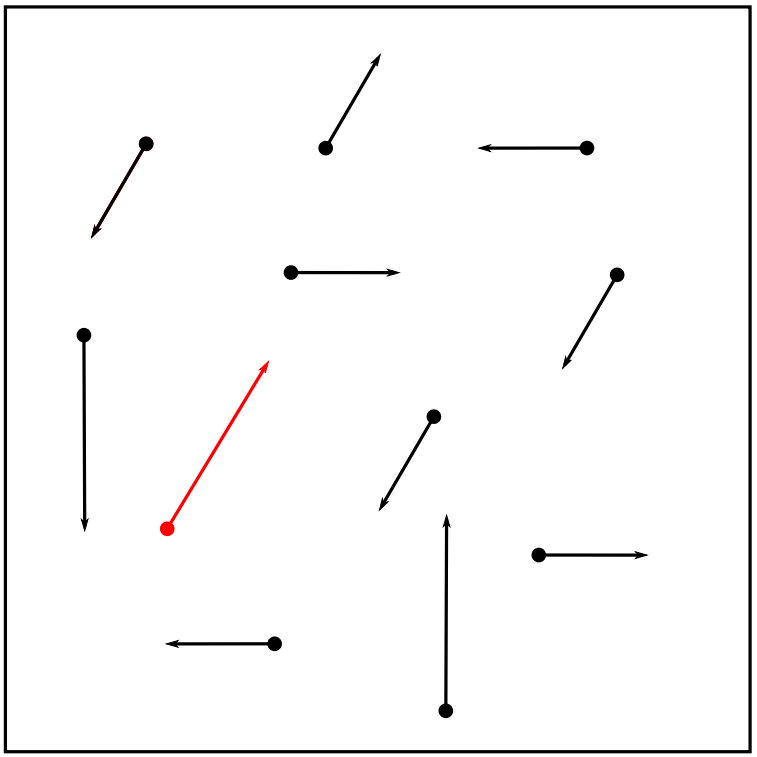
$\Omega =$ 

$\int dE$

$\Phi(r, \Omega) = 3$

Suma wszystkich strzałek o danym kierunku, ale niezależnie od ich długości to całkowity kątowy strumień neutronów $\Phi(r, \Omega)$

Strumień neutronów

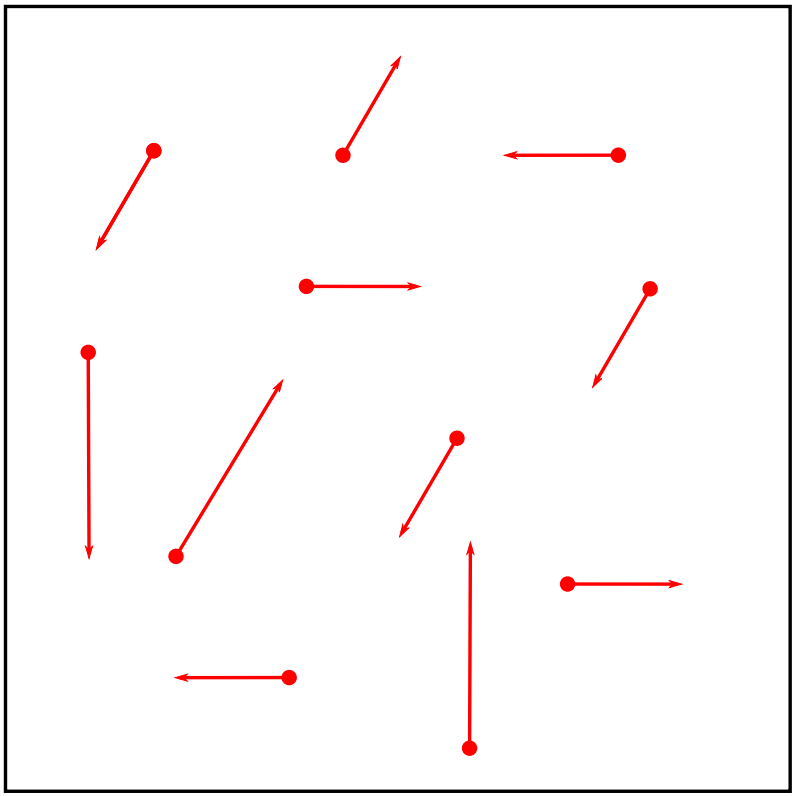


$$\Omega = \quad \int_{E_0}^{E_1} dE$$

$$\Phi_f(r, \Omega) = 2$$

Suma wszystkich strzałek o danym kierunku, i z wybranego zakresu długości, to całkowity strumień kątowy dla neutronów o wybranym zakresie energii (np. prędkich) $\Phi_f(r, \Omega)$

Strumień neutronów



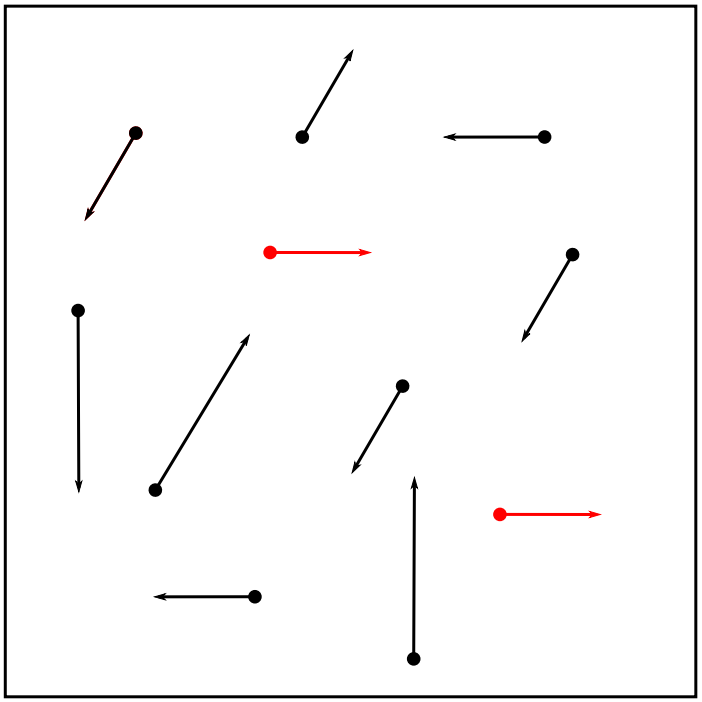
$\int\Omega$

$\int dE$

$\Phi(r) = 14$

Suma wszystkich strzałek niezależnie od kierunku i długości to całkowity strumień neutronów $\Phi(r)$

Prąd neutronów



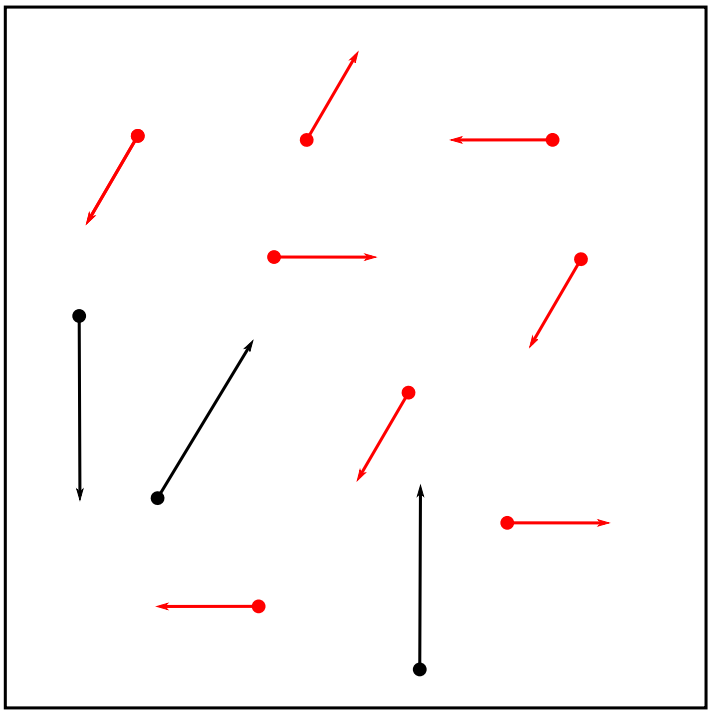
$$\Omega = \longrightarrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \longrightarrow = 1$$

$$\vec{J}(r, E, \Omega) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Suma wektorowa strzałek o tej samej długości i kierunku to kątowy prąd neutronów - $\vec{J}(r, E, \Omega)$

Prąd neutronów



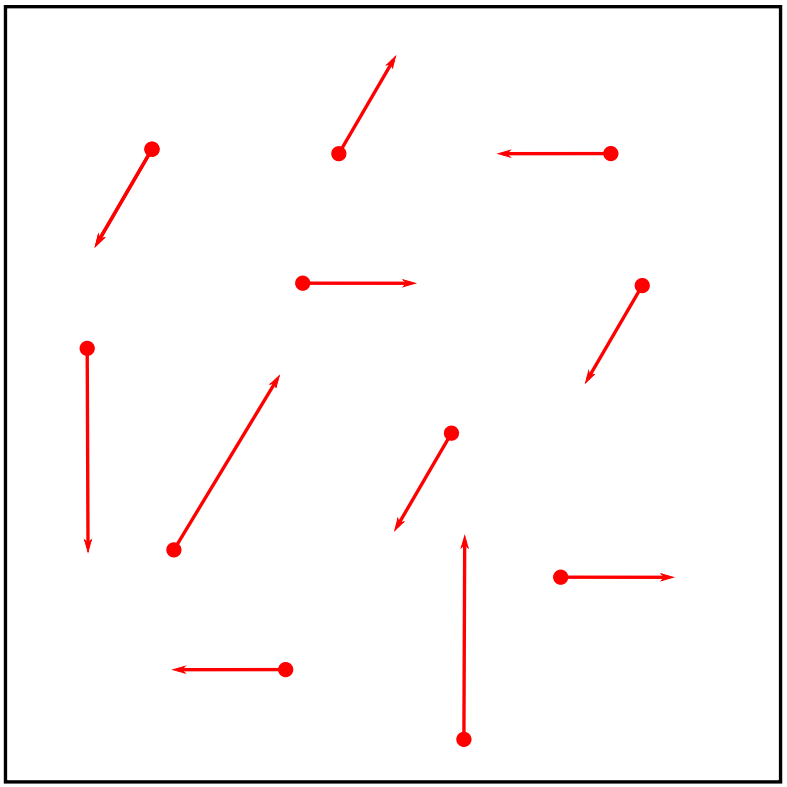
$$\int_{\Omega}$$

$$E = \longrightarrow = 1$$

$$\vec{J}(r, E) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Suma wektorowa strzałek o tej samej długości niezależnie od kierunku to prąd neutronów o energii E - $\vec{J}(r, E)$

Prąd neutronów



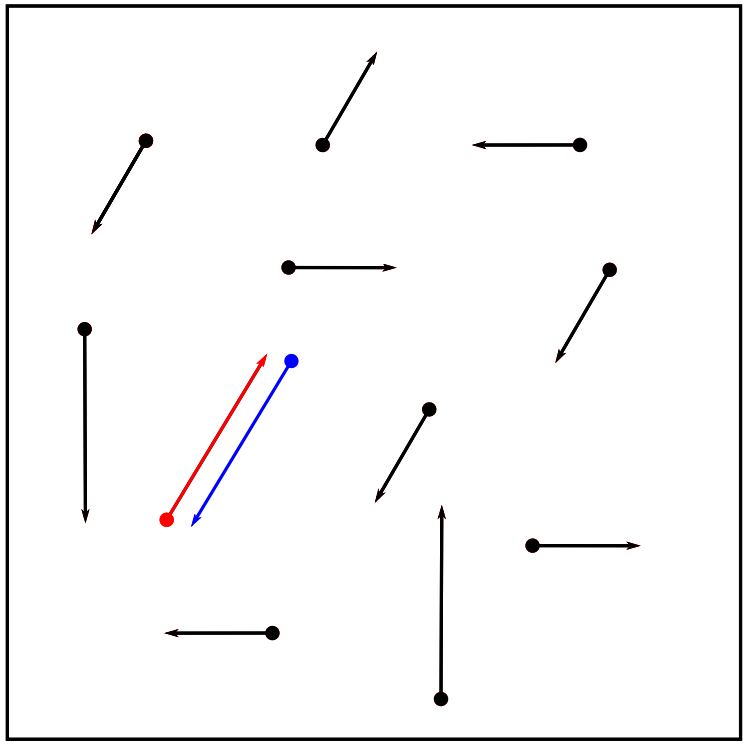
$$\int \Omega$$

$$\int E$$

$$\vec{J}(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Suma wektorowa wszystkich strzałek to całkowity prąd neutronów - $\vec{J}(r)$

Prąd i strumień neutronów



$$\vec{J}(r)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi(r)= 14$$

$$\vec{J}(r)=\begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\Phi(r)= 14$$

Strumień jest wielkością skalarną, a prąd - wektorową. Zależność między nimi jest nietrywialna!

Gradient, dywergencja, rotacja

- Gradient - uogólnienie pochodnej, działa na pole skalarne f, zwraca pole wektorowe, które wskazuje kierunek największego wzrostu

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{e}_z$$

- Dywergencja - działa na pole wektorowe $\vec{v}$, zwraca pole skalarne, które pokazuje lokalny wypływ pola wektorowego z danego punktu

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

- Rotacja - działa na pole wektorowe $\vec{v}$, zwraca pole wektorowe, które opisuje lokalny rotację pola wektorowego wokół danego punktu

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Laplasjan

- Laplasjan to złożenie dywergencji od gradientu pola skalarnego f

$$\nabla \cdot \vec{\nabla} f = \nabla^2 f = \Delta f$$

- W układzie kartezjańskim

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

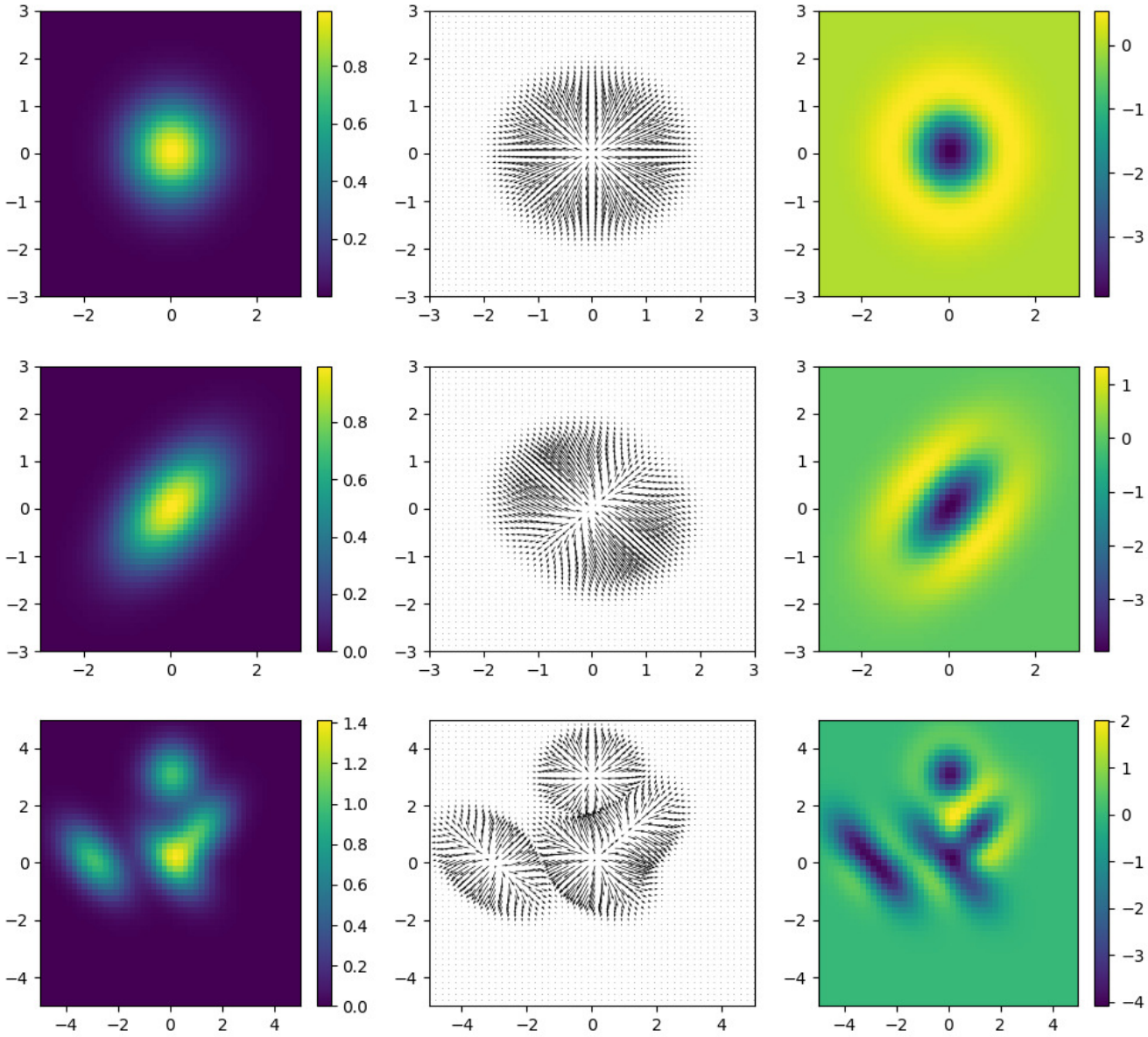
- W układzie cylindrycznym

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- W układzie sferycznym

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

Gęstość, gradient, dywergencja



Równanie dyfuzji neutronów

- Bilans neutronów w czasie w pewnym elemencie objętości

$$\frac{\partial n(\vec{r},t)}{\partial t} = S(\vec{r},t) + \nu\Sigma_f\Phi(\vec{r},t) - \Sigma_a\Phi(\vec{r},t) - U(\vec{r},t)$$

gdzie

  - n - gęstość neutronów
  - Φ - strumień neutronów
  - S - źródło neutronów
  - U - ucieczka neutronów
  - Σ_a - makroskopowy przekrój czynny na absorpcję
  - Σ_f - makroskopowy przekrój czynny na rozszczepienie
  - ν - średnia liczba neutronów powstających w rozszczepieniu

- Ucieczkę można powiązać z prądem neutronów

$$U = \nabla\vec{J}dxdydz$$

Równanie dyfuzji neutronów (2)

Prąd neutronów, poprzez zastowanie przybliżeń

a) Wszystkie neutrony mają tę samą prędkość (efektywne przekroje czynne)
b) Ośrodek jest jednorodny
c) Strumień jest wolno zmienny w przestrzeni
d) Absorpcja jest mała w porównaniu do rozpraszania ($\Sigma_a << \Sigma_{el}$)
e) Rozpraszanie jest izotropowe

można powiązać ze strumieniem

$$\vec{J} = -\frac{1}{3\Sigma_{el}}\vec{\nabla}\Phi$$

(znane jako prawo Ficka, opisujące dyfuzję wielu różnych systemów, nie tylko neutronów), łącznie dostajemy

Równanie dyfuzji neutronów

$$\frac{\partial n}{\partial t} = S + \nu\Sigma_f\Phi - \Sigma_a\Phi + D\Delta\Phi$$

gdzie D to efektywny parametr dyfuzji, który możemy wyznaczać z innych modeli lub eksperymentalnie.

Równanie dyfuzji neutronów (3)

- Warunki zszycia obszarów (1) i (2) rozdzielonych źródłem neutronów o intensywności S_0 (w $x = 0$)
- Zszycie strumienia
$$\Phi_1(0) = \Phi_2(0)$$
- Zszycie prądu
$$J_2(0) = J_1(0) + S_0$$
- Warunki brzegowe ustalamy poprzez porównanie wchodzącej gęstości neutronów na granicy i jej zależności od strumienia. Np. dla materiału na lewo od granicy w x_b, prąd wchodzący do materiału
$$j_-(x_b) = \frac{1}{4}\Phi(x_b) + \frac{1}{2}D\frac{d\Phi(x_b)}{dx}$$
- W szczególności dla granicy z próżnią ($j_-(x_b) = 0$)
$$\frac{1}{\Phi}\left.\frac{d\Phi}{dx}\right|_{x_b} = -\frac{1}{2D} = -\frac{3\Sigma_s}{2}$$

Płaszczyzna (1)

- Wyobraźmy sobie źródło neutronów w postaci nieskończonej płaszczyzny ZY o intensywności S_0 umieszczone w jednorodnym nierozszczepialnym ośrodku o parametrze dyfuzji D i przekroju czynnym na absporpcję Σ_a. Równanie dyfuzji, dla stanu stacjonarnego, dla dowolnego punktu, poza $x = 0$ przyjmie postać

$$-\Sigma_a \Phi + D\Delta\Phi = 0$$

lub ($L^2 \equiv D/\Sigma_a$)

$$\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} - \frac{1}{L^2}\Phi(x) = 0$$

- Po podstawieniu funkcji $\exp(\alpha x)$ otrzymamy rozwiązanie w postaci

$$\Phi(x) = A\exp(-x/L) + B\exp(x/L)$$

Płaszczyzna (2)

- Stałe A i B otrzymamy rozpatrując warunki brzegowe.
- Warunek brzegowy dla $x = 0$ otrzymamy porównując prąd częściowy skierowany w prawo $j_+(0)$ z intensywnością źródła S_0

$$j_+(0) = \frac{1}{4}\Phi(0) - \frac{1}{2}D\frac{d\Phi}{dx} = \frac{A}{4} + \frac{B}{4} + \frac{DA}{2L} - \frac{DB}{2L} = \frac{S_0}{2}$$

- Drugi warunek brzegowy wynika z konieczności spadku strumienia do zera w nieskończoności - stała przy wyrazie rozbieżnym do nieskończoności musi być 0

$$\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

- Stąd pierwszy warunek przyjmuje postać

$$A + \frac{2DA}{L} = 2S_0$$

- I otrzymujemy rozwiązanie

$$\Phi(x) = \frac{2S_0}{1 + \frac{2D}{L}} \exp|-x/L|$$

Płaszczyzna (3)

- W przypadku ośrodka skończonego w osi X, o grubości a warunek brzegowy dla $x = 0$ pozostanie bez zmian
- Dla krawędzi ośrodka (poza ośrodkiem jest próżnia) warunek rozpatrzymy jako brak prądu częściowego wchodzącego („w lewo”)

$$j_-(a) = \frac{1}{4}\Phi(a) + \frac{1}{2}D\frac{d\Phi(a)}{dx} = 0$$

czyli

$$\frac{A}{4}\exp(-a/L) + \frac{B}{4}\exp(a/L) - \frac{DA}{2L}\exp(-a/L) + \frac{DB}{2L}\exp(a/L) = 0$$

- Z rozwiązania układu równań otrzymamy

$$A = \frac{2S_0\left(\frac{2D}{L}+1\right)\exp(2a/L)}{\left(\frac{2D}{L}+1\right)^2\exp(2a/L) - \left(\frac{2D}{L}-1\right)^2}$$

$$B = \frac{2S_0\left(\frac{2D}{L}-1\right)}{\left(\frac{2D}{L}+1\right)^2\exp(2a/L) - \left(\frac{2D}{L}-1\right)^2}$$

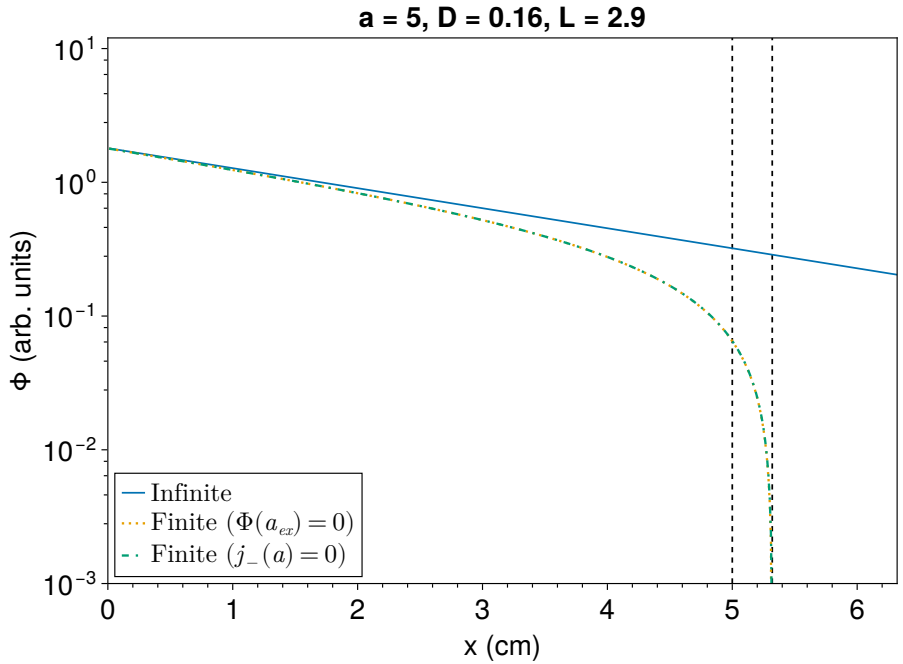
- Dla $a \to \infty$ rozwiązanie zbiega do otrzymanego wcześniej rozwiązania dla nieskończonego ośrodka

Płaszczyzna (4)

- W praktyce często stosowany jest uproszczony warunek brzegowy z próżnią, mianowicie zakładamy, że w pewnej odległości $a' = a + \lambda_{ex}$ strumień spada do 0.
- Ekstrapolowana odległość wynika z pochodnej strumienia na granicy i powinna być równa $\lambda_{ex} = 2D = \frac{2}{3\Sigma_s}$
- Ten warunek, dla zagadnienia z płaszczyzną da równania na współczynniki rozwiązań

$$\begin{cases} A = \dfrac{2S_0 \exp\left(2a/L\right)}{\left(\frac{2D}{L}+1\right)^2 \exp\left(2a/L\right) + \left(\frac{2D}{L}-1\right)} \\ B = \dfrac{2S_0}{\left(1-\frac{2D}{L}\right) - \left(\frac{2D}{L}+1\right)\exp\left(2a/L\right)} \end{cases}$$

- Różnica między pełnym, a ekstrapolowanym warunkiem jest minimalna (o ile $L \gg D$)



Linia (1)

- Wyobraźmy sobie źródło neutronów w postaci nieskończonej linii wzdłuż osi Z o intensywności liniowej S_l umieszczone w jednorodnym nierozszczepialnym ośrodku o parametrze dyfuzji D i przekroju czynnym na absorpcję Σ_a.
- Równanie dyfuzji, dla stanu stacjonarnego, dla dowolnego punktu, poza $z = 0$, rozważamy w układzie cylindrycznym.
- Ze względu na symetrię ϕ, z wystarczy rozwiązanie (jak poprzednio $L^2 \equiv D/\Sigma_a$)

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\Phi(\rho)}{d\rho}\right) - \frac{1}{L^2}\Phi(\rho) = 0$$

- Równanie przekształcamy do postaci

$$\rho^2\frac{d^2\Phi(\rho)}{d\rho^2} + \rho\frac{d\Phi(\rho)}{d\rho} - \frac{\rho^2}{L^2}\Phi(\rho) = 0$$

lub ($x = \rho/L$)

$$x^2\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} + x\frac{d\Phi(x)}{dx} - x^2\Phi(x) = 0$$

Równanie Bessela

- Równanie Bessela rzędu ν ma postać

$$x^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + x \frac{df}{dx} + (x^2 + \nu^2) f = 0$$

- Rozwiązania to (funkcje Bessla pierwszego i drugiego rodzaju)

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\nu+1)}] \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$$

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}$$

- Równanie postaci

$$x^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + x \frac{df}{dx} - (x^2 + \nu^2) f = 0$$

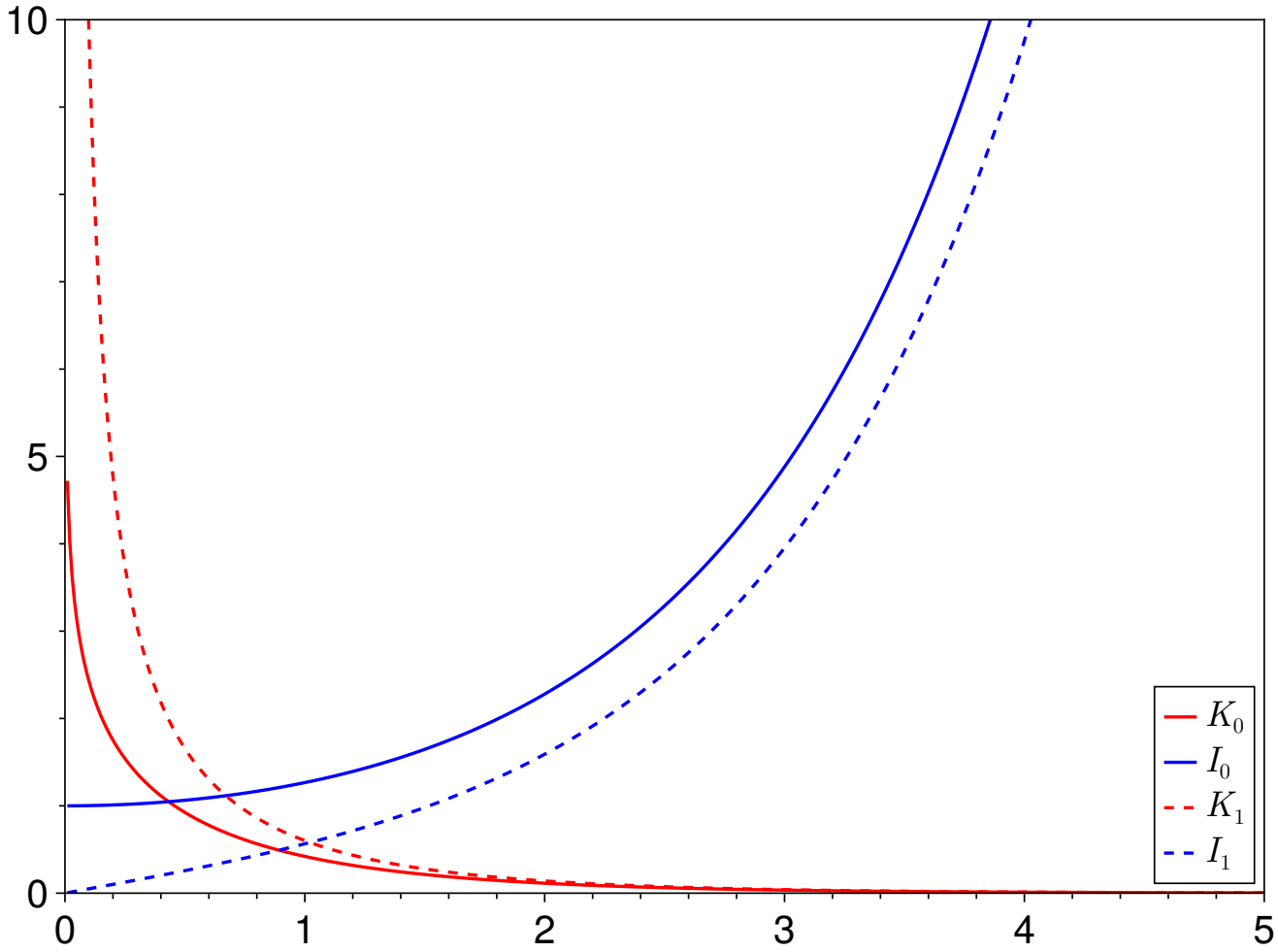
nazywa się zmodyfikowanym równaniem Bessela rzędu ν

- Którego rozwiązania są następujące

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$$

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \nu x}$$

Zmodyfikowane funkcje Bessela



Linia (2)

- Rozwiązaniem będzie zatem liniowa kombinacja zmodyfikowanych funkcji Bessela pierwszego i drugiego rodzaju

$$\Phi(\rho) = AI_0(\rho/L) + BK_0(\rho/L)$$

- Stałe A i B podobnie otrzymamy z warunków brzegowych.
- Z warunku $\lim_{\rho\to\infty} \Phi(\rho) = 0$ dostaniemy $A = 0$ (funkcja I_0 jest rozbieżna do ∞).
- Drugi warunek brzegowy to

$$\lim_{\rho\to 0} 2\pi rJ = S_l$$

  gdzie S_l to intensywność liniowa źródła określona na jednostkę długości $(1/\mathrm{cm}/\mathrm{s})$

- Ponieważ pochodna $\frac{dK_0}{dx} = -K_1(x)$ dostaniemy

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{BD2\pi}{L} K_1(\rho/L) = \left(\lim_{x\to 0} xK_1(x) = 1\right) = \frac{BD2\pi}{L^2} = S_l$$

- I rozwiązanie

$$\Phi(\rho) = \frac{S_l K_0(\rho/L)}{2\pi D}$$

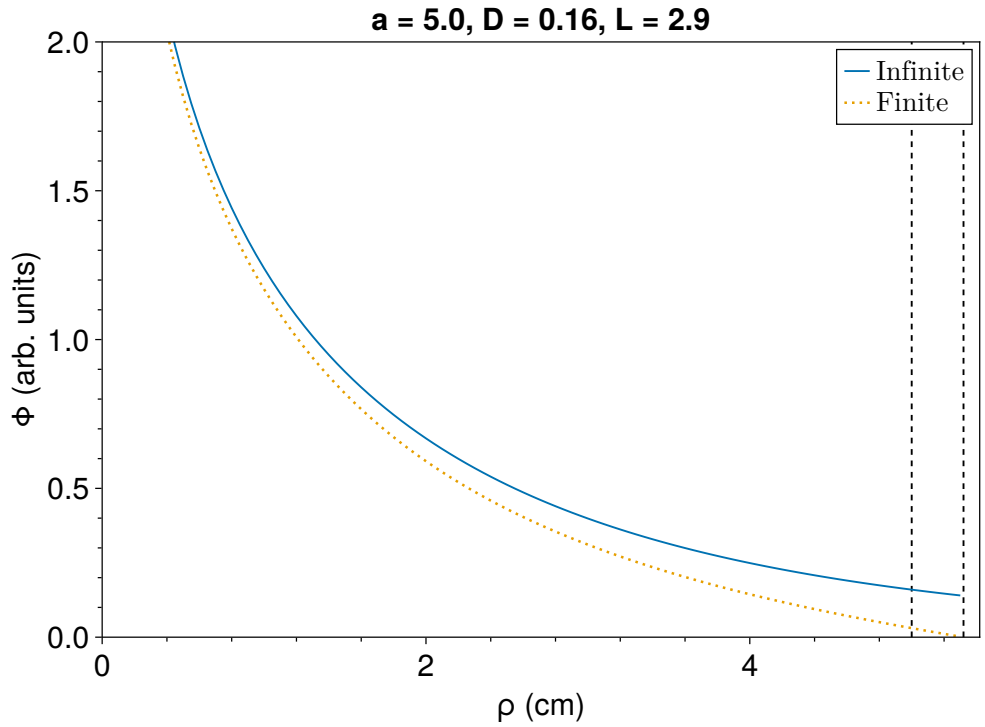
Linia (3)

- Dla ośrodka w kształcie cylindra o promieniu a warunek brzegowy dla $\rho = 0$ pozostanie ten sam, natomiast drugi warunek zastosujemy w postaci uproszczonej tj.

$$\Phi(a') = 0$$

- Stąd rozwiązaniem będzie (używamy własności $\frac{dI_0}{dx} = -I_1(x)$, $\lim_{x\to 0} xI_1(x) = 0$ oraz $\lim_{x\to 0} xK_1(x) = 1$)

$$\Phi(\rho) = \frac{S_l L^2}{2\pi D}\left[K_0(\rho/L) - \frac{K_0(a'/L)}{I_0(a'/L)} I_0(\rho/L)\right]$$



Punkt (1)

- Wyobraźmy sobie źródło neutronów w postaci nieskończonej punktu w środku układu o całkowitej intensywności S_t umieszczone w jednorodnym nierozszczepialnym ośrodku o parametrze dyfuzji D i przekroju czynnym na absorpcję Σ_a.
- Równanie dyfuzji, dla stanu stacjonarnego, dla dowolnego punktu, poza $z = 0$, rozważamy w układzie sferycznym.
- Ze względu na symetrię ϕ, θ wystarczy rozwiązanie równania (jak poprzednio $L^2 \equiv D/\Sigma_a$):

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi(r)}{dr}\right) - \frac{1}{L^2}\Phi(r) = 0$$

- Standardowe rozwiązanie tego równania odbywa się przez podstawienie $\Phi = \frac{u}{r}$, co pozwala uprościć je do postaci

$$\frac{d^2u}{dr^2} - \frac{1}{L^2}u = 0$$

- Rozwiązania mamy zatem postaci

$$\Phi(r) = \frac{A\exp(r/L) + B\exp(-r/L)}{r}$$

- Po zastosowaniu warunków brzegowych ($r \to \infty$ i $r \to 0$) otrzymujemy

$$\Phi(r) = \frac{S_t}{4\pi D r}\exp(-r/L)$$

Problem

Rozwiązać równanie dyfuzji neutronów dla źródła punktowego o intensywności S_t znajdującego się w nieskończonym ośrodku niemnożącym. Następnie rozwiązać problem dla źródła w geometrycznym środku kuli o promieniu a, wykonanej z nierozszczepialnego materiału o stałej dyfuzji D i makroskopowym przekroju czynnym na absorpcję Σ_a. Narysować wyniki dla H_2O, D_2O i grafitu, zakładając promień kuli równy 10 cm.

Parametry modelu dyfuzji dla typowych moderatorów

Materiał	ρ (g/cm^3)	D (cm)	Σ_a (1/cm)	L(cm)	M (cm)
H_2O	1.0	0.16	2.0×10^{-2}	2.9	5.8
D_2O	1.1	0.87	2.9×10^{-5}	170	170
grafit	1.6	0.84	2.4×10^{-4}	59	62

Długość dyfuzji

- Dla rozpatrywanych geometrii źródła (płaszczyzna, punkt) w nieskończonym ośrodku policzymy średni kwadrat odległości od źródła przebytej przez neutron do momentu absorpcji.
- Dla płaszczyzny (jeden wymiar)

$$\left\langle x^2 \right\rangle = \frac{\int_0^\infty x^2 \Sigma_a \Phi dx}{\int_0^\infty \Sigma_a \Phi dx}$$

$$\left\langle x^2 \right\rangle = 2L^2$$

- Dla punktu (trzy wymiary)

$$\left\langle r^2 \right\rangle = \frac{\int_0^\infty r^2 4\pi r^2 \Sigma_a \Phi dr}{\int_0^\infty \Sigma_a \Phi 4\pi r^2 dr}$$

$$\left\langle x^2 \right\rangle = 6L^2$$

- Dostajemy, że wielkość L jest powiązana z kwadratem przebytej drogi jak

$$L = \sqrt{\frac{\langle r^2 \rangle}{6}}$$

- Ponieważ neutrony powstają jako neutrony prędkie (o energii około 1 MeV), mogą przebyć pewną odległość zanim zostaną stermalizowane. Odległość, $\sqrt{\tau_{th}}$ ze względów historycznych, nazywana jest „wiekiem termalizacji” (*age to thermal*). Łącznie długość dyfuzji i τ daje długość migracji M

$$\left\langle r^2 \right\rangle = 6(\tau_{th} + L^2) \equiv 6M^2$$

Strumień neutronów od rozkładu źródeł

- W niemnożącym, jednorodnym ośrodku strumień w punkcie r, od pewnego rozkładu źródeł może być policzony jako suma przyczynków od źródeł umieszczonych w r'

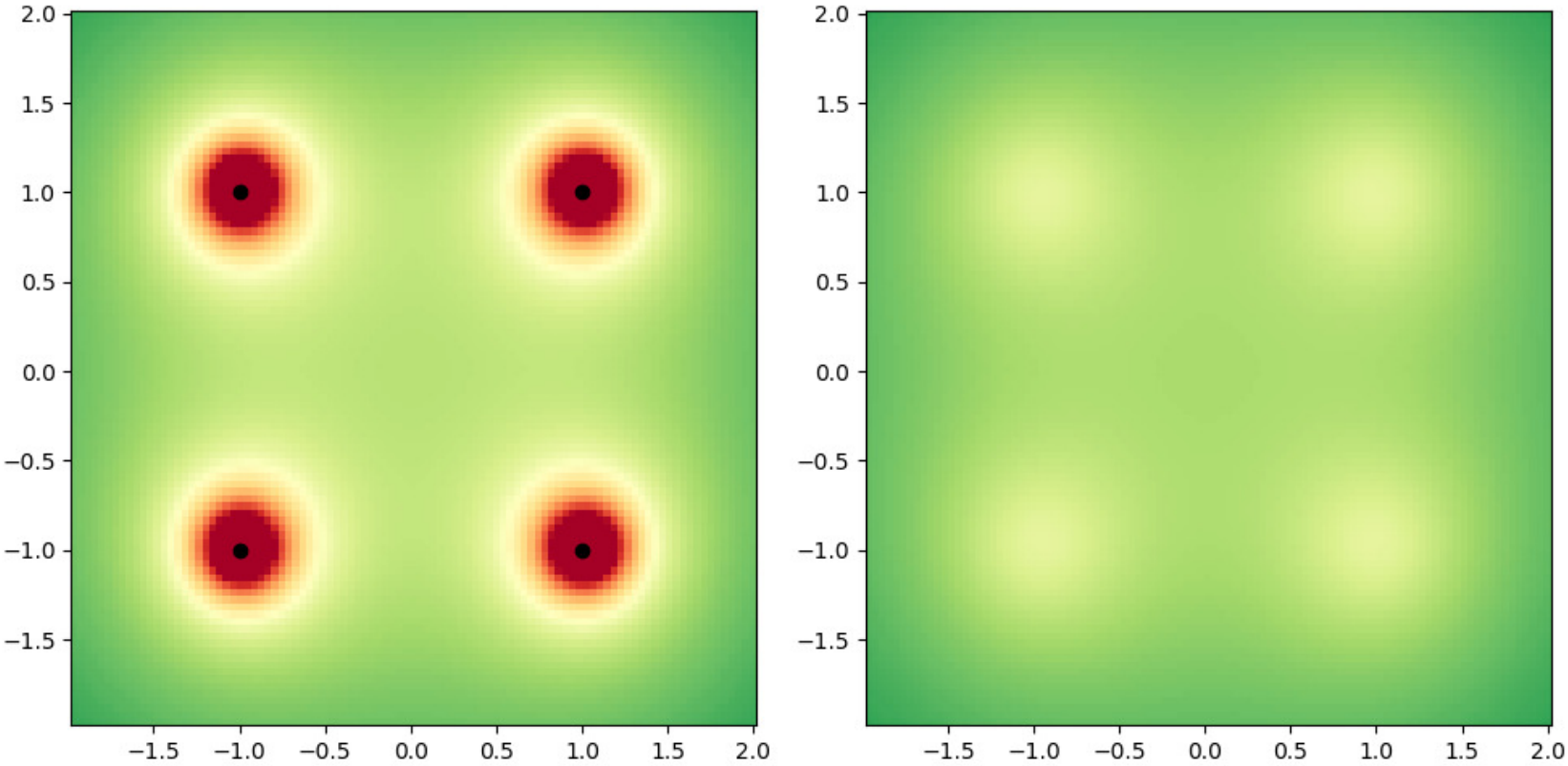
$$\Phi(r) = \int \Phi(r : r')S_0(r')dr'$$

- Poszczególne proste kształty dają następujące przyczynki

Źródło	**Strumień**
Płaszczyzna YZ	$\Phi(x : x') = \frac{2LS_0}{2D+L} \exp\left(-\frac{\lvert x-x'\rvert}{L}\right)$
Liniowe w osi Z	$\Phi(r : r') = \frac{S_l K_0\left(-\frac{\lvert r-r'\rvert}{L}\right)}{2\pi D}$
Punktowe	$\Phi(r : r') = \frac{S_t \exp\left(-\frac{\lvert r-r'\rvert}{L}\right)}{4\pi\lvert r-r'\rvert D}$

Rozkład źródeł

- Przykład strumienia pochodzącego od czterech źródł leżących na płaszczyźnie $z = 0$ $(x, y = \pm 1)$.



- Strumień obliczony dla płaszczyzny $z = 0$ i $z = 1$.