

Neutronika

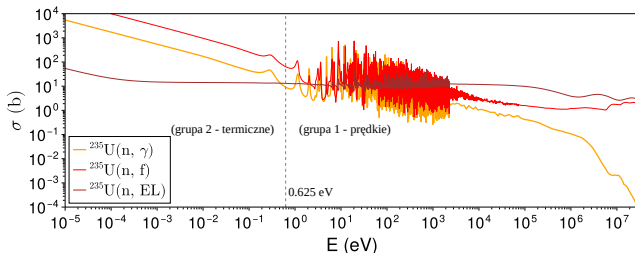
semestr letni 2024/25

Krzysztof Miernik

Wykład 10

Dwugrupowa teoria dyfuzji

- Jednym z mało realistycznych założeń dotychczasowego modelu dyfuzji było przyjęcie jednej energii dla wszystkich neutronów.
- Spróbujemy rozwinąć trochę model przyjmując istnienie dwóch grup - neutronów prędkich (grupa 1) oraz termicznych (grupa 2). Przyjmowaną granicą jest energia 0.625 eV (związana z położeniami rezonansów).



- W takim modelu wszelkie wielkości będą potrzebne dla każdej grupy z osobna ($\Phi_1, \Phi_2, \Sigma_{a1}, \Sigma_{a2}, D_1, D_2, \dots$)
- Pojawia się także nowe - makroskopowy przekrój czynny opisujący prawdopodobieństwo przejścia z grupy 1 do 2 oraz 2 do 1 $\Sigma_{1 \rightarrow 2}, \Sigma_{2 \rightarrow 1}$.

Dwugrupowa teoria dyfuzji (2)

- Zaczniemy od opisu nieskończonego, jednorodnego reaktora.
- Przyjmy następujące założenia
 - Wszystkie neutrony rozszczepieniowe powstaje w grupie 1
 - Wszystkie rozszczepienia powstają w grupie 2 ($\nu\Sigma_{f1} = 0$), ale $\nu\Sigma_{f2}$ jest tak znormalizowane, aby uwzględnić występowanie rozszczepień neutronami prędkimi
 - Przekrój czynny na przejście pomiędzy grupami $\Sigma_{1\rightarrow 2} \neq 0$, $\Sigma_{2\rightarrow 1} = 0$.
- Otrzymujemy równania

$$\begin{aligned} -(\Sigma_{a1} + \Sigma_{1\rightarrow 2})\Phi_1 + \nu\Sigma_{f2}\Phi_2 &= 0 \\ -\Sigma_{a2}\Phi_2 + \Sigma_{1\rightarrow 2}\Phi_1 &= 0 \end{aligned}$$

- Warunkiem istnienia rozwiązania jest zerowy wyznacznik

$$\begin{vmatrix} -(\Sigma_{a1} + \Sigma_{1\rightarrow 2}) & \nu\Sigma_{f2} \\ \Sigma_{1\rightarrow 2} & -\Sigma_{a2} \end{vmatrix} = 0$$

- Takie równanie jest słuszne dla stanu stacjonarnego ($k_{\infty} = 1$). Możemy jednak ułożyć je dla dowolnego układu, jeżeli znormalizujemy produkcję neutronów - $\nu\Sigma_f$ - tak aby odpowiadała $k_{\infty} = 1$ (czyli dzieląc przez tę wielkość)

$$\begin{vmatrix} -(\Sigma_{a1} + \Sigma_{1\rightarrow 2}) & \frac{\nu\Sigma_{f2}}{k_{\infty}} \\ \Sigma_{1\rightarrow 2} & -\Sigma_{a2} \end{vmatrix} = 0$$

Interpretacja dwugrupowej teorii dyfuzji

- Wyliczając wyznacznik otrzymamy warunek na k_{∞}

$$k_{\infty} = \frac{\nu \Sigma_{f2}}{\Sigma_{a2}} \frac{\Sigma_{1 \rightarrow 2}}{\Sigma_{a1} + \Sigma_{1 \rightarrow 2}}$$

- Ten wynik możemy zinterpretować w ramach wzoru 4 czynników, gdzie wyraz

$$\frac{\Sigma_{1 \rightarrow 2}}{\Sigma_{a1} + \Sigma_{1 \rightarrow 2}},$$

będzie odpowiadał prawdopodobieństwu osiągnięcia energii termicznej, (p) a

$$\frac{\nu \Sigma_{f2}}{\Sigma_{a2}},$$

to współczynnik reprodukcji i wykorzystania neutronów termicznych - z definicji - oraz współczynnik rozszczepienia prędkiego ($\eta f \epsilon$) - ponieważ tak zrenormalizowaliśmy wyraz $\nu \Sigma_{f2}$

Operatory F i M

- Wracamy do równania

$$\begin{pmatrix} -(\Sigma_{a1} + \Sigma_{1 \rightarrow 2}) & \nu \Sigma_{f2} \\ \Sigma_{1 \rightarrow 2} & -\Sigma_{a2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = 0$$

- Zapiszemy je jako

$$\begin{aligned} (F - M)\Phi &= 0 \\ F\Phi &= M\Phi, \end{aligned}$$

gdzie F (operator rozszczepienia - produkcji)

$$\begin{pmatrix} 0 & \nu \Sigma_{f2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

oraz M (operator absorpcji i rozpraszania)

$$\begin{pmatrix} (\Sigma_{a1} + \Sigma_{1 \rightarrow 2}) & 0 \\ -\Sigma_{1 \rightarrow 2} & \Sigma_{a2} \end{pmatrix}$$

Operatory F i M (2)

- Jeżeli wprowadzimy k_{eff}

$$M\Phi = \lambda F\Phi = \frac{1}{k_{eff}} F\Phi$$

gdzie k_{eff} to stosunek produkcji do strat

$$k_{eff} = \frac{\int_V F\Phi dr}{\int_V M\Phi dr} = \frac{1}{\lambda}$$

- Taka notacja (F/M) ma tę przewagę, że zmieniając założenia zmienimy operatory, ale równanie w powyższym zapisie pozostaje to samo.
- Na przykład, usuńmy założenia o rozszczepieniu tylko do grupy termicznej, oraz braku rozpraszania $2 \rightarrow 1$. Wtedy

$$F = \begin{pmatrix} \nu\Sigma_{f1} & \nu\Sigma_{f2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} \Sigma_{a1} + \Sigma_{1 \rightarrow 2} & -\Sigma_{2 \rightarrow 1} \\ -\Sigma_{1 \rightarrow 2} & \Sigma_{a2} + \Sigma_{2 \rightarrow 1} \end{pmatrix}.$$

Dwugrupowa teoria dyfuzji - reaktor skończony

- Wracamy do uproszczeń, ale dla skończonego jednorodnego reaktora - musimy dodać ucieczkę neutronów ($-D\Delta\Phi$)

$$\begin{aligned}D_1\Delta\Phi_1 - (\Sigma_{a1} + \Sigma_{1\rightarrow 2})\Phi_1 + \lambda\nu\Sigma_{f2}\Phi_2 &= 0 \\D_2\Delta\Phi_2 - \Sigma_{a2}\Phi_2 + \Sigma_{1\rightarrow 2}\Phi_1 &= 0\end{aligned}$$

- Równania dla grup 1 i 2 możemy rozwiązać znanymi już metodami i otrzymać zakrzywienie ($B_{g,i} = B_i$)

$$-D_i\Delta\Phi_i = D_iB_i^2\Phi_i$$

- Mamy zatem równania

$$\begin{aligned}-D_1B_1^2\Phi_1 - (\Sigma_{a1} + \Sigma_{1\rightarrow 2})\Phi_1 + \lambda\nu\Sigma_{f2}\Phi_2 &= 0 \\-D_2B_2^2\Phi_2 - \Sigma_{a2}\Phi_2 + \Sigma_{1\rightarrow 2}\Phi_1 &= 0\end{aligned}$$

- Jak poprzednio - warunkiem rozwiązania będzie zerowy wyznacznik

$$\begin{vmatrix}-D_1B_1^2 - (\Sigma_{a1} + \Sigma_{1\rightarrow 2}) & \frac{\nu\Sigma_{f2}}{k_{eff}} \\ \Sigma_{1\rightarrow 2} & -D_2B_2^2 - \Sigma_{a2}\end{vmatrix} = 0$$

Dwugrupowa teoria dyfuzji - reaktor skończony (2)

- Otrzymamy warunek na k_{eff}

$$k_{eff} = \frac{\nu \Sigma_{f2}}{D_2 B_2^2 + \Sigma_{a2}} \frac{\Sigma_{1 \rightarrow 2}}{D_1 B_1^2 + \Sigma_{a1} + \Sigma_{1 \rightarrow 2}}$$

- Przepiszemy te wyrażenie do postaci

$$k_{eff} = \frac{\nu \Sigma_{f2}}{\Sigma_{a2}} \frac{1}{1 + \frac{D_2 B_2^2}{\Sigma_{a2}}} \frac{\Sigma_{1 \rightarrow 2}}{\Sigma_{a1} + \Sigma_{1 \rightarrow 2}} \frac{1}{1 + \frac{D_1 B_1^2}{\Sigma_{a1} + \Sigma_{1 \rightarrow 2}}}$$

- W pierwszym i trzecim wyrazie rozpoznamy odpowiednio $\eta f \epsilon$ oraz p .
- Możemy odznaleźć także długość rozpraszania neutronów termicznych

$$\frac{D_2}{\Sigma_{a2}} = L_2^2$$

oraz długość rozpraszania neutronów prędkich (lub „wiek do termicznych”)

$$\frac{D_1}{\Sigma_{a1} + \Sigma_{1 \rightarrow 2}} = L_1^2 = \tau$$

Dwugrupowa teoria dyfuzji - reaktor skończony (3)

- Nasz wzór

$$k_{eff} = \frac{\nu \Sigma_{f2}}{\Sigma_{a2}} \frac{1}{1 + B_2^2 L_2^2} \frac{\Sigma_{1 \rightarrow 2}}{\Sigma_{a1} + \Sigma_{1 \rightarrow 2}} \frac{1}{1 + B_1^2 \tau},$$

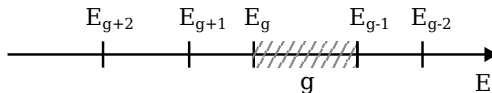
- możemy zatem zinterpretować jako wzór 6 czynników

$$k_{eff} = \underbrace{\frac{\nu \Sigma_{f2}}{\Sigma_{a2}}}_{\eta f \epsilon} \underbrace{\frac{\Sigma_{1 \rightarrow 2}}{\Sigma_{a1} + \Sigma_{1 \rightarrow 2}}}_p \underbrace{\frac{1}{1 + B_2^2 L_2^2}}_{L_t} \underbrace{\frac{1}{1 + B_1^2 \tau}}_{L_f}.$$

- Jak widać wzór 6 czynników jest tożsamy dla dwugrupowego modelu dyfuzji dla skończonego i jednorodnego reaktora (z pewnymi uproszczeniami). Rozwiązując daną geometrię (B_i^2) oraz znając materiały możemy z modelu policzyć jaki współczynnik mnożenia powinien mieć dany reaktor.

Wielogrupowa teoria dyfuzji

- Dwie grupy można traktować nadal jako bardzo mocne uproszczenie, ale podążając przedstawionym schematem, możemy wprowadzić ich dowolnie dużo (G).



- Dla grupy g równanie dyfuzji będzie miało postać

$$\frac{1}{v_g} \frac{\partial \Phi_g}{\partial t} = \Delta D_g \Delta \Phi_g - \Sigma_{a,g} \Phi_g + S_g - \sum_{g'} \Sigma_{s,g \rightarrow g'} \Phi_g + \sum_{g'} \Sigma_{s,g' \rightarrow g} \Phi_{g'}$$

gdzie kolejne wyrazy to

zmiana w czasie = ucieczka – absorpcja + źródło – rozpr. z g + rozpr. do g

a wyraz S (źródło) zawiera przyczynki produkcji neutronów w danej grupie w rozszczepieniu i źródła zewnętrzne

$$S_g = \chi_g \sum_{g'} \nu_{g'} \Sigma_{fg'} \Phi_{g'} + S_g^{ext}$$

Wielogrupowa teoria dyfuzji (2)

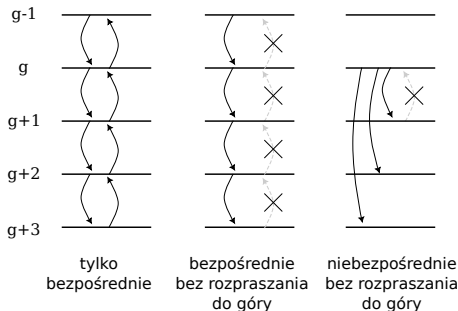
- Największym problem tego modelu będzie ustalenie parametrów:

$$\nu_g, D_g, \Sigma_{a,g}, \Sigma_{g_i \rightarrow g_j}, \chi_g, \Sigma_{f,g}, \nu_g$$

- Dla G grup będziemy mieli $G^2 + 6 \times G$
- Obliczenia z bardzo wieloma grupami i pełną geometrią są bardzo kosztowne numerycznie, stąd stosowane są schematy iteracyjne w których obliczenia są prowadzone:
 - 1 prosta geometria, dużo grup
 - 2 wyznaczenie parametrów
 - 3 pełna geometria, mało grup
 - 4 powrót do (1)
- Liczba grup waha się od 4 do 20 w typowych obliczeniach, ale stosowane są też mikrogrupy (np. 1000) w pewnych zastosowaniach.

Wielogrupowa teoria dyfuzji (2)

- Oczywistym miejscem, w którym można uzyskać redukcję liczby parametrów, jest wiodący w liczbie parametrów wyraz G^2 pochodzący z macierzy sprzężeń pomiędzy grupami ($\Sigma_{i \rightarrow j}$)
- Możemy rozważyć kilka schematów uproszczeń sprzężeń pomiędzy grupami



- Najwygodniejsze byłaby wersja (2), gdzie mamy tylko bezpośrednie połączenia i tylko przechodzenie z większej energii do mniejszej. Macierz M posiadałaby tylko dwie diagonalie, główną i tę tuż pod nią.

Przybliżenie sprzężeń bezpośrednich

- Wcześniej liczyliśmy, że energia neutronu po rozproszeniu zawiera się w przedziale

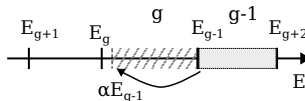
$$E' \in [\alpha E, E]$$

gdzie

$$\alpha = \left(\frac{A-1}{A+1} \right)^2$$

- Aby mieć tylko sprzężenia bezpośrednie musimy zadbać, aby

$$\alpha E_{g-1} > E_g$$



czyli

$$\frac{E_{g-1}}{E_g} > \frac{1}{\alpha}$$

- Dla węgla $\alpha = 0.716$ i stosunek energii kolejnych grup musi być większy niż 1.4
- Niestety dla wodoru $\alpha = 0$ i nie mamy możliwości spełnienia tego warunku...

Wielogrupowa teoria dyfuzji (3)

- Jeżeli wybierzemy przybliżenie w schemacie (3) (niebezpośrednie, ale bez sprzężeń do góry) to równania dla stanów stacjonarnych będą następujące

$$-\Delta D_g \Delta \Phi_g + \Sigma_{R,g} \Phi_g = - \sum_{g'=1}^{g-1} \Sigma_{s,g' \rightarrow g} \Phi_{g'} + \frac{1}{k} \chi_g \sum_{g'}^G \nu_{g'} \Sigma_{fg'} \Phi_{g'},$$

gdzie

$$\Sigma_{R,g} = \Sigma_{a,g} + \sum_{g'=g+1}^G \Sigma_{s,g \rightarrow g'}$$

to prawdopodobieństwo usunięcia (absorpcji lub do dolnych grup).

- Problem możemy ponownie przedstawić jako

$$M\Phi = F\Phi$$

- Macierz F zawiera kolejne wkłady do rozszczepień od kolejnych grup

$$F = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} \chi_1 \nu_1 \Sigma_{f1} & \chi_1 \nu_2 \Sigma_{f2} & \dots \\ \chi_2 \nu_1 \Sigma_{f1} & \chi_2 \nu_2 \Sigma_{f2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Wielogrupowa teoria dyfuzji (4)

- Macierz M jest dolnotrójkątna, ponieważ zarządaliśmy braku sprzężeń do góry

$$M = \begin{pmatrix} -\Delta D_1 \Delta + \Sigma_{R,1} & 0 & 0 & \dots \\ -\Sigma_{s,1 \rightarrow 2} & -\Delta D_2 \Delta + \Sigma_{R,2} & 0 & \dots \\ -\Sigma_{s,1 \rightarrow 3} & -\Sigma_{s,2 \rightarrow 3} & -\Delta D_3 \Delta + \Sigma_{R,3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

- Ułatwieniem w rozwiązywaniu tego problemu, jest fakt, że źródła rozszczepienia mają ten sam rozkład przestrzenny we wszystkich grupach (w wierszach zmienia się tylko χ_i)

$$S(r) = \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \Sigma f, g' \Phi_{g'}(r)$$

- Jeżeli popatrzymy na kolejne równania, to zaczynając od najwyższej energii (grupa 1) mamy

$$\begin{aligned} -\Delta D_1 \Delta \Phi_1 + \Sigma_{R,1} \Phi_1 &= \frac{1}{k} \chi_1 S \\ -\Delta D_2 \Delta \Phi_2 + \Sigma_{R,2} \Phi_2 - \Sigma_{1 \rightarrow 2} \Phi_1 &= \frac{1}{k} \chi_2 S \\ \dots &\dots \\ -\Delta D_G \Delta \Phi_G + \Sigma_{R,G} \Phi_G - \Sigma_{1 \rightarrow G} \Phi_1 - \Sigma_{2 \rightarrow G} \Phi_2 - \dots - \Sigma_{G-1 \rightarrow G} \Phi_{G-1} &= \frac{1}{k} \chi_G S \end{aligned}$$

Wielogrupowa teoria dyfuzji (5)

- Dzięki takiemu układowi możemy rozwiązanie zacząć od zgadnięcia postaci $S^{(0)}$ i $k^{(0)}$, a następnie zacząć od grupy (1)

$$-\Delta D_1 \Delta \Phi_1^{(1)} + \Sigma_{R,1} \Phi_1^{(1)} = \frac{1}{k^{(0)}} \chi_1 S^{(0)}$$

- Obliczone Φ_1 możemy podstawić do równania kolejnej grupy

$$-\Delta D_2 \Delta \Phi_2^{(1)} + \Sigma_{R,2} \Phi_2^{(1)} - \Sigma_{1 \rightarrow 2} \Phi_1^{(1)} = \frac{1}{k^{(0)}} \chi_2 S^{(0)}$$

i tak dalej, aż do grupy G .

- Dzięki temu możemy wyznaczyć nową postać źródła $S^{(1)}$ i $k^{(1)}$

$$S^{(1)}(r) = \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \Sigma f, g' \Phi_{g'}^{(1)}(r)$$

$$k^{(1)}(r) = \frac{\int d^3 r S^{(1)}(r)}{\frac{1}{k^{(0)}} \int d^3 r S^{(0)}(r)}$$

- Powtarzając ten schemat dążymy do samozgodności rozwiązania