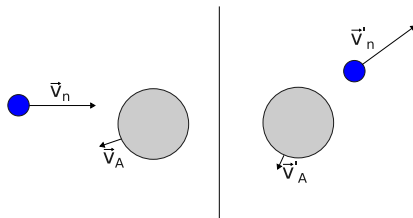


Część II - rozpraszanie neutronów

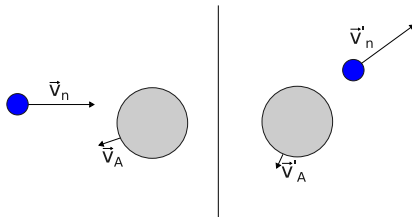
Rozpraszanie elastyczne

- Rozpraszanie elastyczne neutronów ma miejsce gdy po zderzeniu z jądrem atomowym zachowana jest energia kinetyczna układu



Rozpraszanie elastyczne

- Rozpraszanie elastyczne neutronów ma miejsce gdy po zderzeniu z jądrem atomowym zachowana jest energia kinetyczna układu



- Zachowany jest pęd układu

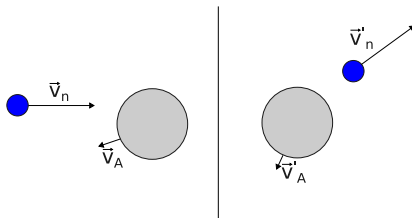
$$m_n \vec{v}_n + M_A \vec{v}_A = m_n \vec{v}'_n + M_A \vec{v}'_A$$

oraz energia kinetyczna

$$\frac{m_n v_n^2}{2} + \frac{M_A v_A^2}{2} = \frac{m_n v_n'^2}{2} + \frac{M_A v_A'^2}{2}$$

Rozpraszanie elastyczne

- Rozpraszanie elastyczne neutronów ma miejsce gdy po zderzeniu z jądrem atomowym zachowana jest energia kinetyczna układu



- Zachowany jest pęd układu

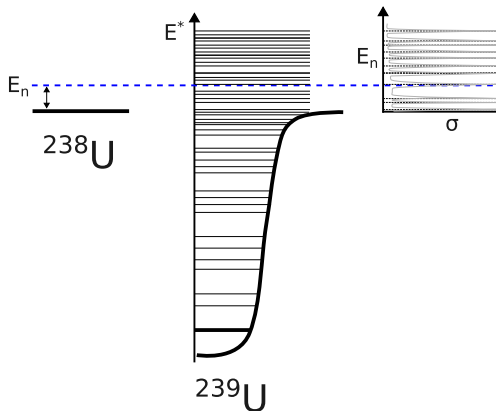
$$m_n \vec{v}_n + M_A \vec{v}_A = m_n \vec{v}'_n + M_A \vec{v}'_A$$

oraz energia kinetyczna

$$\frac{m_n v_n^2}{2} + \frac{M_A v_A^2}{2} = \frac{m_n v_n'^2}{2} + \frac{M_A v_A'^2}{2}$$

- Neutron może zostać pochłonięty przez jądro i ponownie wyemitowany z zachowaniem energii kinetycznej (*rozpraszanie rezonansowe*). Ten rodzaj rozpraszania silnie zależy od energii neutronu i jest bardzo prawdopodobny jeżeli energia jest zgodna ze stanem rezonansowym w jądrze tarczy.
- Neutron może również rozprzyszczyć się na podobnej zasadzie jak kule bilardowe, bez tworzenia jądra złożonego (*rozpraszanie na potencjale*).

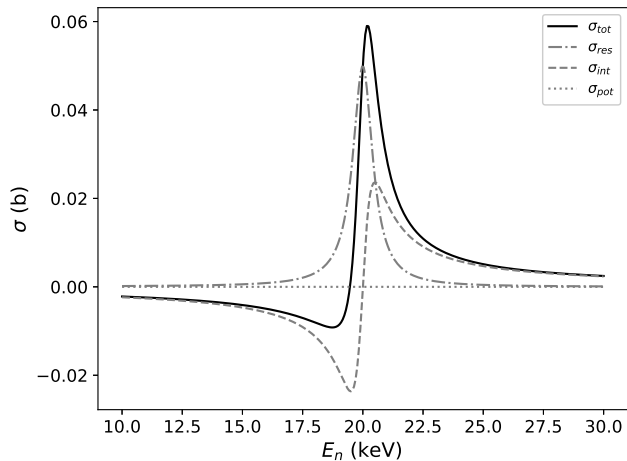
Rezonanse



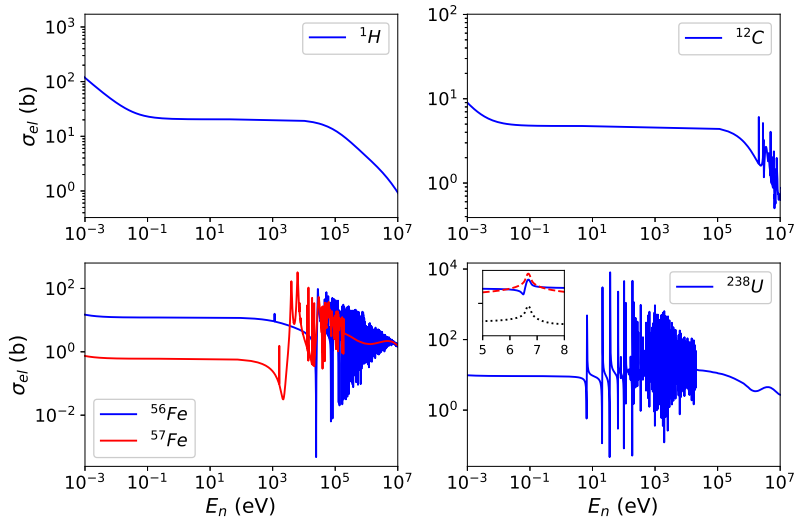
Przekrój czynny jest sumą rozpraszania na potencjale oraz rozpraszania rezonansowego (przez jądro złożone) oraz interferencji obydwu sposobów

$$\sigma(E) = \underbrace{r\pi R^2}_{\text{pot.}} + \underbrace{\sigma_0 \frac{\Gamma_n}{\Gamma} \left(\frac{E_0}{E}\right)^{1/2} \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + 4(E - E_0)^2}}_{\text{rezonans - kształt Lorentza}} + \underbrace{\frac{\sigma_0 2R}{\lambda_0} \frac{2\Gamma(E - E_0)}{\Gamma^2 + 4(E - E_0)^2}}_{\text{interferencja}}$$

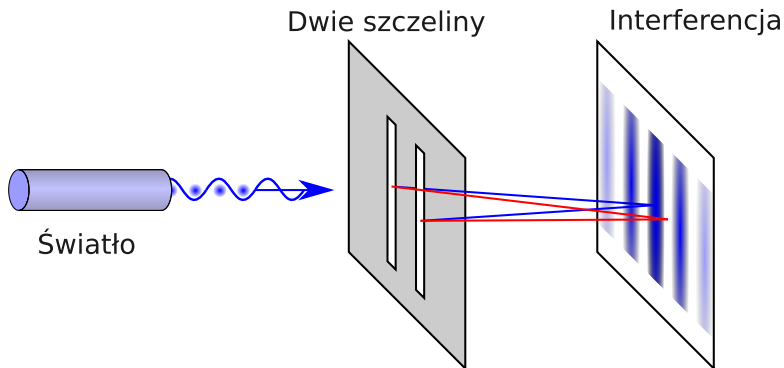
Składowe rezonansu



Przekrój czynny na rozproszenie



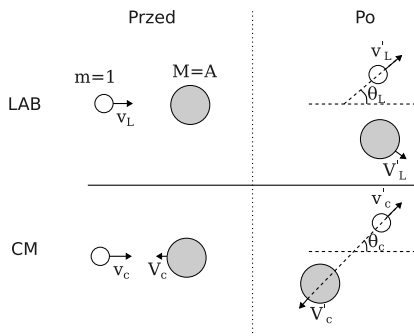
Interferencja



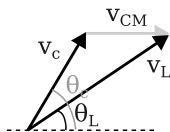
Neutrony zachowują się także jak fale i mogą interferować same ze sobą!

Kinematyka rozpraszania elastycznego

- Układ laboratoryjny i środka masy



- Prędkość w LAB, a CM



Kinematyka rozpraszania elastycznego

- Stosunek energii po rozproszeniu do pierwotnej

$$\frac{E'_L}{E_L} = \frac{(1 + \alpha) + (1 - \alpha) \cos \theta_c}{2}, \quad \alpha = \left(\frac{A - 1}{A + 1} \right)^2$$

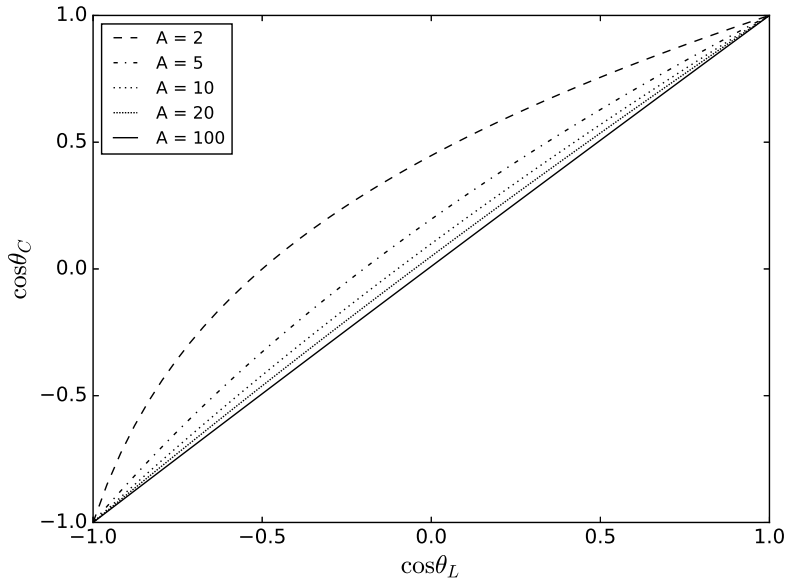
- Zależność kąta w układzie LAB od kąta w układzie CM

$$\tan \theta_L = \frac{\sin \theta_c}{1/A + \cos \theta_c}$$

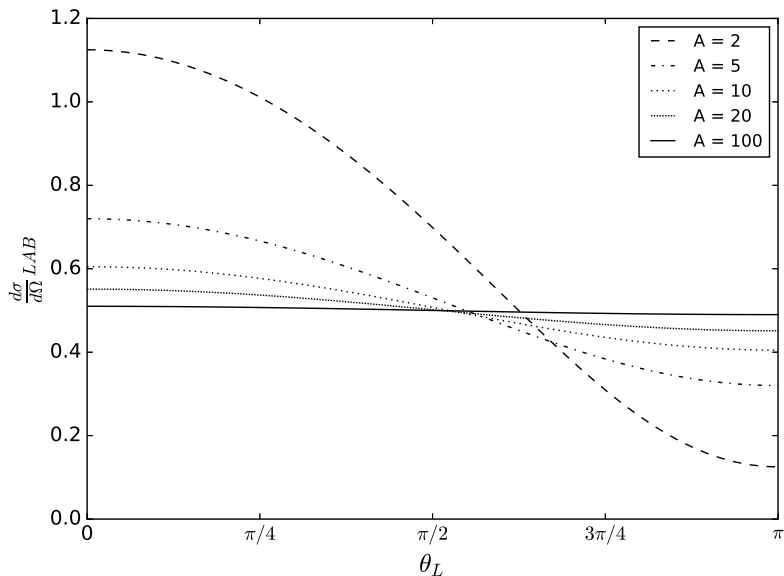
- Różniczkowy przekrój czynny LAB, a CM

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega_L} \right|_L = \frac{(1/A^2 + 1 + 2/A \cos \theta_c)^{3/2}}{1 + 1/A \cos \theta_c} \left. \frac{d\sigma}{d\Omega_L} \right|_c$$

$\cos \theta_L$ i $\cos \theta_C$



Anizotropowość rozpraszania w LAB



Kinematyka rozpraszania elastycznego

- Rozpraszanie jest izotropowe w CM

$$p(\theta_c, \phi_c) = \frac{1}{2} \sin \theta_c \frac{1}{2\pi}$$

- Średni kąt rozpraszania w LAB

$$\cos \bar{\theta}_L = \frac{\int_0^{4\pi} \cos \theta_L d\Omega}{\int_0^{4\pi} d\Omega} = \left\{ d\Omega = 2\pi \sin \theta_c d\theta_c \right\} = \dots = \frac{2}{3A}$$

- Prawdopodobieństwo rozpraszania z E_L do $E'_L \pm dE'_L$ zależy od prawdopodobieństwa rozpraszania w kąt bryłowy $\theta_c \pm d\theta_c$.

$$\sigma_s(E_L) P(E_L \rightarrow E'_L) dE'_L = -\sigma_{CM}(\theta_c) 2\pi \sin \theta_c d\theta_c$$

stąd

$$P(E_L \rightarrow E'_L) = \begin{cases} \frac{4\pi \sigma_{CM}(\theta_c)}{(1-\alpha)E_L \sigma_s(E_L)} & \alpha E_L \leq E'_L \leq E_L \\ 0 & \text{dla pozostałych} \end{cases}$$

Kinematyka rozpraszania elastycznego

- Dla rozpraszania izotropowego w CM

$$P(E_L \rightarrow E'_L) = \frac{1}{(1 - \alpha)E_L}$$

- Średnia energia po zderzeniu

$$\langle E'_L \rangle = \int_{\alpha E_L}^{E_L} dE'_L E'_L \frac{1}{(1 - \alpha)E_L} = \dots = \frac{E_L(1 + \alpha)}{2}$$

- Średnia liczba zderzeń potrzebna do obniżenia energii od E_0 do E_n

$$E_1 = \frac{1 + \alpha}{2} E_0 = k E_0$$

$$E_2 = k^2 E_0$$

...

$$E_n = k^n E_0$$

Stąd

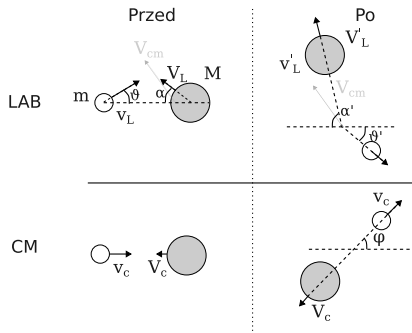
$$n = \log_k \left(\frac{E_n}{E_0} \right) = \ln \left(\frac{E_n}{E_0} \right) \frac{1}{\ln(k)}$$

- Średnia logarytmiczna strata energii

$$\xi \equiv \int_{\alpha E_L}^{E_L} dE'_L \ln \left(\frac{E'_L}{E_L} \right) \frac{1}{(1 - \alpha)E_L} = \dots = 1 + \frac{(A - 1)^2}{2A} \ln \left(\frac{A - 1}{A + 1} \right)$$

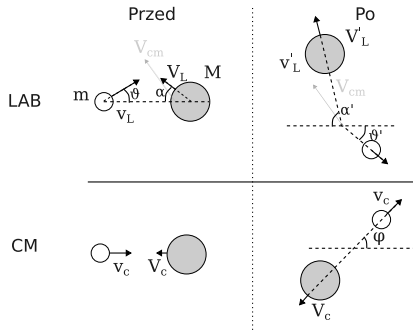
Rozpraszanie na ruchomej tarczy

- Układ laboratoryjny i środka masy, dla dwóch poruszających się składników rozpraszania



Rozpraszanie na ruchomej tarczy

- Układ laboratoryjny i środka masy, dla dwóch poruszających się składników rozpraszania



- Prędkość środka masy

$$\vec{V}_{cm} = \frac{m\vec{v} + M\vec{V}}{m + M}$$

względna prędkość neutronu i jądra

$$\vec{u} = \vec{v} - \vec{V}$$

Rozpraszanie na ruchomej tarczy

- Wszystkie kierunki ruchu neutronu względem jądra i względnego ruchu neutronu w CM są równie prawdopodobne (nie jest to łatwe do udowodnienia, choć intuicyjne), czyli

$$\langle \vec{v} \cdot \vec{v} \rangle = 0, \quad \langle \vec{u} \cdot \vec{V}_{cm} \rangle = 0$$

Rozpraszanie na ruchomej tarczy

- Wszystkie kierunki ruchu neutronu względem jądra i względnego ruchu neutronu w CM są równie prawdopodobne (nie jest to łatwe do udowodnienia, choć intuicyjne), czyli

$$\langle \vec{v} \cdot \vec{v} \rangle = 0, \quad \langle \vec{u} \cdot \vec{V}_{cm} \rangle = 0$$

- Z drugiej strony możemy zapisać

$$\vec{u} \cdot \vec{V}_{cm} = (\vec{v} - \vec{V}) \left(\frac{m\vec{v} + M\vec{V}}{m + M} \right) = \frac{m}{M + m} v^2 + \vec{v} \cdot \vec{V} \frac{M - m}{M + m} - \frac{M}{m + M} V^2$$

Rozpraszanie na ruchomej tarczy

- Wszystkie kierunki ruchu neutronu względem jądra i względnego ruchu neutronu w CM są równie prawdopodobne (nie jest to łatwe do udowodnienia, choć intuicyjne), czyli

$$\langle \vec{v} \cdot \vec{v} \rangle = 0, \quad \langle \vec{u} \cdot \vec{V}_{cm} \rangle = 0$$

- Z drugiej strony możemy zapisać

$$\vec{u} \cdot \vec{V}_{cm} = (\vec{v} - \vec{V}) \left(\frac{m\vec{v} + M\vec{V}}{m + M} \right) = \frac{m}{M + m} v^2 + \vec{v} \cdot \vec{V} \frac{M - m}{M + m} - \frac{M}{m + M} V^2$$

- Jeżeli policzymy średnią wartość tego wyrażenia to

$$0 = \langle \vec{u} \cdot \vec{V}_{cm} \rangle = \frac{m}{M + m} \langle v^2 \rangle + \langle \vec{v} \cdot \vec{V} \rangle \frac{M - m}{M + m} - \frac{M}{m + M} \langle V^2 \rangle$$

Rozpraszanie na ruchomej tarczy

- Wszystkie kierunki ruchu neutronu względem jądra i względnego ruchu neutronu w CM są równie prawdopodobne (nie jest to łatwe do udowodnienia, choć intuicyjne), czyli

$$\langle \vec{v} \cdot \vec{v} \rangle = 0, \quad \langle \vec{u} \cdot \vec{V}_{cm} \rangle = 0$$

- Z drugiej strony możemy zapisać

$$\vec{u} \cdot \vec{V}_{cm} = (\vec{v} - \vec{V}) \left(\frac{m\vec{v} + M\vec{V}}{m + M} \right) = \frac{m}{M + m} v^2 + \vec{v} \cdot \vec{V} \frac{M - m}{M + m} - \frac{M}{m + M} V^2$$

- Jeżeli policzymy średnią wartość tego wyrażenia to

$$0 = \langle \vec{u} \cdot \vec{V}_{cm} \rangle = \frac{m}{M + m} \langle v^2 \rangle + \langle \vec{v} \cdot \vec{V} \rangle \frac{M - m}{M + m} - \frac{M}{m + M} \langle V^2 \rangle$$

- Na mocy tego co powiedzieliśmy,

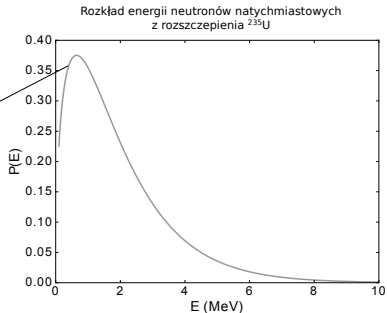
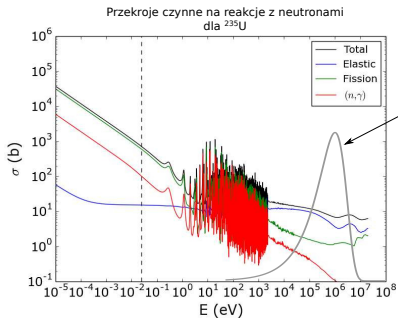
$$\langle \vec{v} \cdot \vec{V} \rangle = 0$$

stąd

$$m \langle v^2 \rangle = M \langle V^2 \rangle$$

- A zatem średnia energia kinetyczna neutronów będzie równa średniej energii kinetycznej atomów ośrodka.

Neutrony natychmiastowe



$$N(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{E}{(kT)^3}} \exp(-E/kT)$$

$$kT = 1.29 \text{ MeV}$$

Spowalnianie neutronów

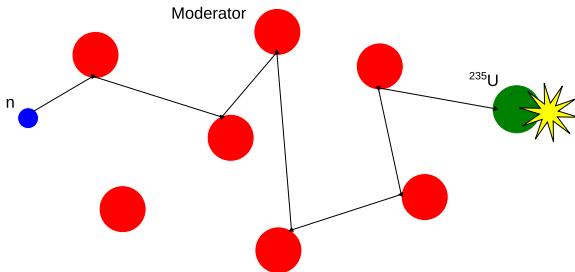
- Neutrony natychmiastowe z rozszczepienia mają energie około 1-2 MeV. Ponieważ największy przekrój czynny jest dla neutronów termicznych (< 1 eV), w większości reaktorów są one spowalniane.

Spowalnianie neutronów

- Neutrony natychmiastowe z rozszczepienia mają energie około 1-2 MeV. Ponieważ największy przekrój czynny jest dla neutronów termicznych (< 1 eV), w większości reaktorów są one spowalniane.
- Spowalnianie neutronów odbywa się poprzez rozpraszanie elastyczne z atomami ośrodka. Neutrony można spowolnić tylko do energii odpowiadającej ruchom termicznym ośrodka.

Spowalnianie neutronów

- Neutrony natychmiastowe z rozszczepienia mają energie około 1-2 MeV. Ponieważ największy przekrój czynny jest dla neutronów termicznych (< 1 eV), w większości reaktorów są one spowalniane.
- Spowalnianie neutronów odbywa się poprzez rozpraszanie elastyczne z atomami ośrodka. Neutrony można spowolnić tylko do energii odpowiadającej ruchom termicznym ośrodka.
- Dobry moderator (materiał specjalnie dobrany do spowalniania) powinien posiadać
 - duży przekrój czynny na rozpraszanie (aby często do niego dochodziło),
 - mały przekrój czynny na pochłanianie (aby neutrony nie ginęły),
 - duży przekaz energii w pojedynczym akcie zderzenia (aby możliwie szybko je spowolnić i aby nie uciekły z reaktora).



Średnia logarytmiczna strata energii

- Średnia logarytmiczna strata energii w pojedynczym zderzeniu (początkowa energia E_i , końcowa E_f) jest wygodnym parametrem do opisu moderatora.

$$\xi = \ln(E_i) - \ln(E_f) = \ln\left(\frac{E_i}{E_f}\right)$$

Średnia logarytmiczna strata energii

- Średnia logarytmiczna strata energii w pojedynczym zderzeniu (początkowa energia E_i , końcowa E_f) jest wygodnym parametrem do opisu moderatora.

$$\xi = \ln(E_i) - \ln(E_f) = \ln\left(\frac{E_i}{E_f}\right)$$

- Okazuje się, że ta wielkość zależy tylko od materiału i jest stała w zależności od energii neutronu.
- Dla typowych materiałów istnieją odpowiednie tabele, ale w ogólnym przypadku można tę wartość przybliżyć jako

$$\xi = \frac{2}{A + 2/3}$$

Średnia logarytmiczna strata energii

- Średnia logarytmiczna strata energii w pojedynczym zderzeniu (początkowa energia E_i , końcowa E_f) jest wygodnym parametrem do opisu moderatora.

$$\xi = \ln(E_i) - \ln(E_f) = \ln\left(\frac{E_i}{E_f}\right)$$

- Okazuje się, że ta wielkość zależy tylko od materiału i jest stała w zależności od energii neutronu.
- Dla typowych materiałów istnieją odpowiednie tabele, ale w ogólnym przypadku można tę wartość przybliżyć jako

$$\xi = \frac{2}{A + 2/3}$$

- Znając ξ możemy łatwo policzyć liczbę potrzebnych zderzeń dla neutronu spowalnianego z energii E_1 do E_0 .

$$n = \frac{\ln(E_1/E_0)}{\xi}$$

Średnia logarytmiczna strata energii

- Średnia logarytmiczna strata energii w pojedynczym zderzeniu (początkowa energia E_i , końcowa E_f) jest wygodnym parametrem do opisu moderatora.

$$\xi = \ln(E_i) - \ln(E_f) = \ln\left(\frac{E_i}{E_f}\right)$$

- Okazuje się, że ta wielkość zależy tylko od materiału i jest stała w zależności od energii neutronu.
- Dla typowych materiałów istnieją odpowiednie tabele, ale w ogólnym przypadku można tę wartość przybliżyć jako

$$\xi = \frac{2}{A + 2/3}$$

- Znając ξ możemy łatwo policzyć liczbę potrzebnych zderzeń dla neutronu spowalnianego z energii E_1 do E_0 .

$$n = \frac{\ln(E_1/E_0)}{\xi}$$

- Np. dla węgla $\xi = 0.158$, czyli spowalnianie neutronu od energii 1 MeV do 1 eV wymaga

$$n = \frac{\ln(10^6/1)}{0.158} = 87$$

- Wprawdzie średnia logarymiczna strata energii wygodnie opisuje własność materiału w pojedynczym zderzeniu, nie jest wystarczającą miarą tego czy materiał jest dobrym moderatorem, bo uwzględnia tylko straty energii neutronów.

- Wprawdzie średnia logarymiczna strata energii wygodnie opisuje własność materiału w pojedynczym zderzeniu, nie jest wystarczającą miarą tego czy materiał jest dobrym moderatorem, bo uwzględnia tylko straty energii neutronów.
- Kolejny parametr do opisu moderatora to makroskopowa zdolność spowalniająca, (MSDP - Macroscopic Slowing Down Power), która uwzględnia także przekrój czynny na rozpraszanie

$$MSDP = \xi \Sigma_s$$

- Wprawdzie średnia logarytmiczna strata energii wygodnie opisuje własność materiału w pojedynczym zderzeniu, nie jest wystarczającą miarą tego czy materiał jest dobrym moderatorem, bo uwzględnia tylko straty energii neutronów.
- Kolejny parametr do opisu moderatora to makroskopowa zdolność spowalniająca, (MSDP - Macroscopic Slowing Down Power), która uwzględnia także przekrój czynny na rozpraszanie

$$MSDP = \xi \Sigma_s$$

- Wreszcie parametr, który bierze pod uwagę także prawdopodobieństwo absorpcji to współczynnik spowalniania (MR - Moderating Ratio)

$$MR = \frac{MSDP}{\Sigma_a} = \frac{\xi \Sigma_s}{\Sigma_a}$$

- Wprawdzie średnia logarytmiczna strata energii wygodnie opisuje własność materiału w pojedynczym zderzeniu, nie jest wystarczającą miarą tego czy materiał jest dobrym moderatorem, bo uwzględnia tylko straty energii neutronów.
- Kolejny parametr do opisu moderatora to makroskopowa zdolność spowalniająca, (MSDP - Macroscopic Slowing Down Power), która uwzględnia także przekrój czynny na rozpraszanie

$$MSDP = \xi \Sigma_s$$

- Wreszcie parametr, który bierze pod uwagę także prawdopodobieństwo absorpcji to współczynnik spowalniania (MR - Moderating Ratio)

$$MR = \frac{MSDP}{\Sigma_a} = \frac{\xi \Sigma_s}{\Sigma_a}$$

- Im wyższy MR tym lepiej dany materiał sprawdza się jako moderator. Oczywiście wybór danej substancji nie zależy tylko od tego współczynnika, ale także od jej innych cech (np. kosztów, bezpieczeństwa, dostępności, możliwości zastosowania w danym projekcie itd.).

Termalizacja neutronów

Materiał	ξ	\bar{n}	MSDP	MR
H ₂ O	0.925	19	1.39	71
D ₂ O	0.508	35	0.18	4487
⁹ Be	0.207	70	0.167	135
¹² C	0.158	92	0.086	247
²³ Na	0.085	172	0.006	0.543
⁵⁶ Fe	0.035	411	0.037	0.175
²³⁸ U	0.008	1731	0.004	0.031

gdzie

- $\xi = \ln(E_i/E_f)$ średnia logarytmiczna strata energii
- \bar{n} średnia liczba zderzeń potrzebna do termalizacji
- $MSDP = \sum_{el} \xi$ makroskopowa zdolność spowalniająca
- $MR = \xi \sum_{el} / \Sigma_a$ współczynnik spowalniania

Wzbogacenie i rozpowszechnienie

- Naturalny skład izotopowy pierwiastków (rozpowszechnienie - γ) jest podawany w procentach cząsteczkowych (ile cząstek na 100 cząstek jest danego izotopu). Np. miedź posiada dwa stabilne izotopy ^{63}Cu (69.15%) oraz ^{65}Cu (30.85%).

Wzbogacenie i rozpowszechnienie

- Naturalny skład izotopowy pierwiastków (rozpowszechnienie - γ) jest podawany w procentach cząsteczkowych (ile cząstek na 100 cząstek jest danego izotopu). Np. miedź posiada dwa stabilne izotopy ^{63}Cu (69.15%) oraz ^{65}Cu (30.85%).
- Ilość cząstek izotopu i na cm^3 w materiale można łatwo obliczyć

$$N_i = \gamma_i \frac{\rho N_A}{M}$$

gdzie M to masa molowa naturalnego składu izotopowego (mieszaniny, nie danego izotopu!)

Wzbogacenie i rozpowszechnienie

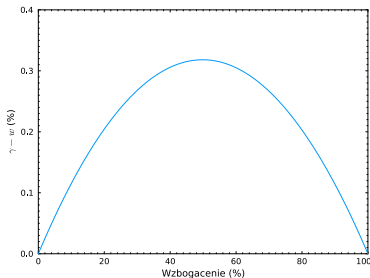
- Naturalny skład izotopowy pierwiastków (rozpowszechnienie - γ) jest podawany w procentach cząsteczkowych (ile cząstek na 100 cząstek jest danego izotopu). Np. miedź posiada dwa stabilne izotopy ^{63}Cu (69.15%) oraz ^{65}Cu (30.85%).
- Ilość cząstek izotopu i na cm^3 w materiale można łatwo obliczyć

$$N_i = \gamma_i \frac{\rho N_A}{M}$$

gdzie M to masa molowa naturalnego składu izotopowego (mieszanki, nie danego izotopu!)

- W przypadku uranu podawane jest wzbogacenie, które jest w procentach masowych (w_i). Czyli wzbogacenie 10% oznacza, że 10% masy to ^{235}U , a reszta ^{238}U . Ponieważ masa ^{235}U i ^{238}U nie są sobie równe, przeliczenie na procenty cząsteczkowe nie jest oczywiste.

$$N_i = \gamma_i N = \frac{\frac{w_i}{M_i}}{\sum_j \frac{w_j}{M_j}} \frac{\rho_0 N_A}{M_0}$$



Úśrednioné przekroje czynne

Spectrum-Averaged Thermal, Resonance, and Fast Neutron Cross Sections (barns)

Nudide	Thermal Cross Section			Resonance Cross Section		Fission Spectrum Cross Section				
	σ_f	σ_γ	σ_{el}	σ_f	σ_γ	σ_f	σ_γ	σ_{el}	σ_{in}	$\sigma_{n, 2n}$
²³³ U ₉₂	469	41	11.9	774	138	1.9	0.07	4.4	1.2	4×10^{-3}
²³⁵ U ₉₂	507	87	15.0	278	133	1.2	0.09	4.6	1.8	12×10^{-3}
²³⁹ Pu ₉₄	698	274	7.8	303	182	1.8	0.05	4.4	1.5	4×10^{-3}
²⁴¹ Pu ₉₄	938	326	11.1	573	180	1.6	0.12	5.2	0.9	21×10^{-3}
²³² Th ₉₀	-	6.5	13.7	-	84	0.08	0.09	4.6	2.9	14×10^{-3}
²³⁸ U ₉₂	-	2.4	9.4	2	278	0.31	0.07	4.8	2.6	12×10^{-3}
²⁴⁰ Pu ₉₄	0.05	264	1.5	8.9	8103	1.4	0.09	4.3	2.0	4×10^{-3}
²⁴² Pu ₉₄	-	16.8	8.3	5.6	1130	1.1	0.09	4.8	1.9	7×10^{-3}
¹ H ₁	-	0.29	20.5	-	0.15	-	4×10^{-5}	3.9	-	-
² H ₁	-	5×10^{-4}	3.4	-	3×10^{-4}	-	7×10^{-6}	2.5	-	-
¹⁰ B ₅	-	443	2.1	-	0.22	-	8×10^{-5}	2.1	0.07	-
¹² C ₆	-	0.003	4.7	-	0.002	-	2×10^{-5}	2.3	0.01	-
¹⁶ O ₈	-	2×10^{-4}	3.8	-	6×10^{-4}	-	9×10^{-5}	2.7	-	-
²³ Na ₁₁	-	0.47	3.0	-	0.31	-	2×10^{-4}	2.7	0.5	-
⁵⁶ Fe ₂₆	-	2.5	12.5	-	1.4	-	3×10^{-3}	3.0	0.7	-
⁹¹ Zr ₄₀	-	1.1	10.6	-	6.9	-	0.01	5.0	0.7	-
¹³⁵ Xe ₅₄	-	2.7×10^6	3.8×10^5	-	7.6×10^3	-	0.01	4.9	1.0	-
¹⁴⁹ Sm ₆₂	-	6.0×10^4	373	-	3.5×10^3	-	0.22	4.6	2.2	-
¹⁵⁷ Gd ₆₄	-	1.9×10^3	819	-	761	-	0.11	4.7	2.2	11×10^{-3}

Source Data from <http://www.nndc.bnl.gov/>.

Problem 1

Zadanie A

Wyznaczyć średnią stratę logarytmiczną ξ oraz liczbę zderzeń potrzebną do spowolnienia neutronu od 2 MeV do 1 eV dla: ^1H , ^2D , ^4He , ^9Be , ^{12}C , ^{16}O , ^{23}Na , ^{56}Fe , ^{238}U .

Zadanie B

Wyznaczyć całkowity makroskopowy przekrój czynny oraz średnią drogę swobodną na wychwyty dla wody i ciężkiej wody dla neutronów termicznych, rezonansowych i prędkich.

Zadanie C

Wyznaczyć całkowity makroskopowy przekrój czynny oraz średnią drogę swobodną dla węgla i boru dla neutronów termicznych.

Zadanie D

Wyznaczyć makroskopowy przekrój czynny oraz średnią drogę swobodną na rozszczepienie i wychwyty dla ditlenku uranu o wzbogaceniu 4%, dla neutronów termicznych oraz prędkich.