

Część VI - strumień neutronów

Prędkość reakcji

- Naszym celem jest policzenie ile zachodzi reakcji w danym punkcie układu - jednostkami tej wielkości będzie $1/\text{cm}^3/\text{s}$.

Prędkość reakcji

- Naszym celem jest policzenie ile zachodzi reakcji w danym punkcie układu - jednostkami tej wielkości będzie $1/\text{cm}^3/\text{s}$.
- Liczba reakcji będzie proporcjonalna do makroskopowego przekroju czynnego Σ (1/cm).

Prędkość reakcji

- Naszym celem jest policzenie ile zachodzi reakcji w danym punkcie układu - jednostkami tej wielkości będzie $1/\text{cm}^3/\text{s}$.
- Liczba reakcji będzie proporcjonalna do makroskopowego przekroju czynnego Σ ($1/\text{cm}$).
- Częstość zachodzenia reakcji będzie związana z prędkością padających neutronów v .

$$f = v\Sigma \frac{\text{cm}}{\text{s}} \frac{1}{\text{cm}} = \frac{1}{\text{s}}$$

Prędkość reakcji

- Naszym celem jest policzenie ile zachodzi reakcji w danym punkcie układu - jednostkami tej wielkości będzie $1/\text{cm}^3/\text{s}$.
- Liczba reakcji będzie proporcjonalna do makroskopowego przekroju czynnego Σ ($1/\text{cm}$).
- Częstość zachodzenia reakcji będzie związana z prędkością padających neutronów v .

$$f = v\Sigma \frac{\text{cm}}{\text{s}} \frac{1}{\text{cm}} = \frac{1}{\text{s}}$$

- Ale to ile będzie reakcji w danym punkcie musi też zależeć od tego ile jest tam neutronów - od ich gęstości n ($1/\text{cm}^3$).

Prędkość reakcji

- Naszym celem jest policzenie ile zachodzi reakcji w danym punkcie układu - jednostkami tej wielkości będzie $1/\text{cm}^3/\text{s}$.
- Liczba reakcji będzie proporcjonalna do makroskopowego przekroju czynnego Σ ($1/\text{cm}$).
- Częstość zachodzenia reakcji będzie związana z prędkością padających neutronów v .

$$f = v\Sigma \frac{\text{cm}}{\text{s}} \frac{1}{\text{cm}} = \frac{1}{\text{s}}$$

- Ale to ile będzie reakcji w danym punkcie musi też zależeć od tego ile jest tam neutronów - od ich gęstości n ($1/\text{cm}^3$).
- Stąd prędkość reakcji

$$R = nv\Sigma \frac{1}{\text{cm}^3\text{s}}$$

Prędkość reakcji

- Naszym celem jest policzenie ile zachodzi reakcji w danym punkcie układu - jednostkami tej wielkości będzie $1/\text{cm}^3/\text{s}$.
- Liczba reakcji będzie proporcjonalna do makroskopowego przekroju czynnego Σ ($1/\text{cm}$).
- Częstość zachodzenia reakcji będzie związana z prędkością padających neutronów v .

$$f = v\Sigma \frac{\text{cm}}{\text{s}} \frac{1}{\text{cm}} = \frac{1}{\text{s}}$$

- Ale to ile będzie reakcji w danym punkcie musi też zależeć od tego ile jest tam neutronów - od ich gęstości n ($1/\text{cm}^3$).
- Stąd prędkość reakcji

$$R = nv\Sigma \frac{1}{\text{cm}^3\text{s}}$$

- W tym równaniu możemy wyróżnić wielkość Φ , nazywaną strumieniem neutronów (myląco!), czyli całkowita długość jakie przebędą neutrony w ciągu jednostki czasu w jednostce objętości

$$\Phi(r, E, t) = \int_{4\pi} n(r, E, \Omega, t) v d\Omega,$$

całkowanie po kierunkach wynika z faktu, że nie interesuje nas w którą stronę porusza się neutron, tylko jego wartość prędkości v .

Strumień, prąd

- Formalnie prędkość reakcji, przekrój czynny i strumień może zależeć także od kierunku ruchu (strumień kątowy), ale nie będziemy potem takiej zależności używać.
- Strumień możemy całkować po energii lub wybranych przedziałach energii

strumień kątowy	$\phi(r, E, \Omega)$	
strumień	$\Phi(r, E)$	$= \int_{\Omega} \Phi(r, E, \Omega) d\Omega$
całkowity strumień kątowy	$\bar{\Phi}(r, \Omega)$	$= \int_E \Phi(r, E, \Omega) dE$
strumień termiczny	$\Phi_{th}(r)$	$= \int_{E_1}^{E_2} \Phi(r, E) dE$
całkowity strumień	$\Phi(r)$	$= \int_0^{\infty} \Phi(r, E) dE$

Strumień, prąd

- Formalnie prędkość reakcji, przekrój czynny i strumień może zależeć także od kierunku ruchu (strumień kątowy), ale nie będziemy potem takiej zależności używać.
- Strumień możemy całkować po energii lub wybranych przedziałach energii

strumień kątowy	$\phi(r, E, \Omega)$	
strumień	$\Phi(r, E)$	$= \int_{\Omega} \Phi(r, E, \Omega) d\Omega$
całkowity strumień kątowy	$\Phi(r, \Omega)$	$= \int_E \Phi(r, E, \Omega) dE$
strumień termiczny	$\Phi_{th}(r)$	$= \int_{E_1}^{E_2} \Phi(r, E) dE$
całkowity strumień	$\Phi(r)$	$= \int_0^{\infty} \Phi(r, E) dE$

- Strumień jest wielkością skalarną o jednostkach $1/\text{cm}^2/\text{s}$.

Strumień, prąd

- Formalnie prędkość reakcji, przekrój czynny i strumień może zależeć także od kierunku ruchu (strumień kątowy), ale nie będziemy potem takiej zależności używać.
- Strumień możemy całkować po energii lub wybranych przedziałach energii

strumień kątowy	$\phi(r, E, \Omega)$	
strumień	$\Phi(r, E)$	$= \int_{\Omega} \Phi(r, E, \Omega) d\Omega$
całkowity strumień kątowy	$\Phi(r, \Omega)$	$= \int_E \Phi(r, E, \Omega) dE$
strumień termiczny	$\Phi_{th}(r)$	$= \int_{E_1}^{E_2} \Phi(r, E) dE$
całkowity strumień	$\Phi(r)$	$= \int_0^{\infty} \Phi(r, E) dE$

- Strumień jest wielkością skalarną o jednostkach $1/\text{cm}^2/\text{s}$.
- Prędkość reakcji

$$R = \Phi(r)\Sigma(r) = \int_0^{\infty} \Phi(r, E)\Sigma(r, E)dE$$

Strumień, prąd

- Formalnie prędkość reakcji, przekrój czynny i strumień może zależeć także od kierunku ruchu (strumień kątowy), ale nie będziemy potem takiej zależności używać.
- Strumień możemy całkować po energii lub wybranych przedziałach energii

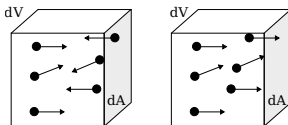
strumień kątowy	$\phi(r, E, \Omega)$	
strumień	$\Phi(r, E)$	$= \int_{\Omega} \Phi(r, E, \Omega) d\Omega$
całkowity strumień kątowy	$\Phi(r, \Omega)$	$= \int_E \Phi(r, E, \Omega) dE$
strumień termiczny	$\Phi_{th}(r)$	$= \int_{E_1}^{E_2} \Phi(r, E) dE$
całkowity strumień	$\Phi(r)$	$= \int_0^{\infty} \Phi(r, E) dE$

- Strumień jest wielkością skalarną o jednostkach $1/\text{cm}^2/\text{s}$.
- Prędkość reakcji

$$R = \Phi(r)\Sigma(r) = \int_0^{\infty} \Phi(r, E)\Sigma(r, E)dE$$

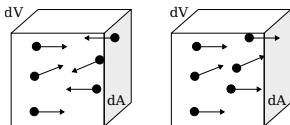
Strumień, prąd

- Neutrony mogą się poruszać, ale w danej objętości może być ich ciągle tyle samo - strumień nie informuje nas o przepływie neutronów.



Strumień, prąd

- Neutrony mogą się poruszać, ale w danej objętości może być ich ciągle tyle samo - strumień nie informuje nas o przepływie neutronów.

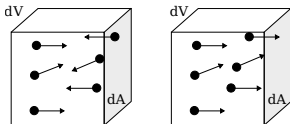


- Przepływ neutronów będzie inną wielkością, która będzie zależna od zmiany gęstości, ale także od kierunku - będzie to wielkość wektorowa - gęstość prądu neutronów

$$\vec{J}(r, E) = \int_{4\pi} n(r, E, \Omega) \vec{v} d\Omega = \int_{4\pi} n(r, E, \Omega) v \hat{\Omega} d\Omega$$

Strumień, prąd

- Neutrony mogą się poruszać, ale w danej objętości może być ich ciągle tyle samo - strumień nie informuje nas o przepływie neutronów.



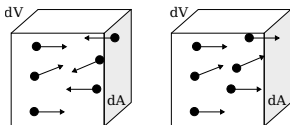
- Przepływ neutronów będzie inną wielkością, która będzie zależna od zmiany gęstości, ale także od kierunku - będzie to wielkość wektorowa - gęstość prądu neutronów

$$\vec{J}(r, E) = \int_{4\pi} n(r, E, \Omega) \vec{v} d\Omega = \int_{4\pi} n(r, E, \Omega) v \hat{\Omega} d\Omega$$

- Gęstość prądu określa liczbę neutronów przechodzącą przez wybraną jednostkową powierzchnię o wektorze normalnym równoległym z kierunkiem, na jednostkę czasu. Jednostki będą te same co dla strumienia ($1/\text{cm}^2/\text{s}$), ale interpretacja jest inna!

Strumień, prąd

- Neutrony mogą się poruszać, ale w danej objętości może być ich ciągle tyle samo - strumień nie informuje nas o przepływie neutronów.

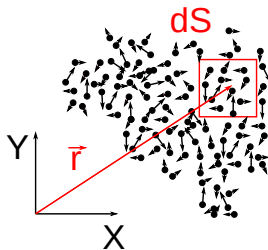


- Przepływ neutronów będzie inną wielkością, która będzie zależna od zmiany gęstości, ale także od kierunku - będzie to wielkość wektorowa - gęstość prądu neutronów

$$\vec{J}(r, E) = \int_{4\pi} n(r, E, \Omega) \vec{v} d\Omega = \int_{4\pi} n(r, E, \Omega) v \hat{\Omega} d\Omega$$

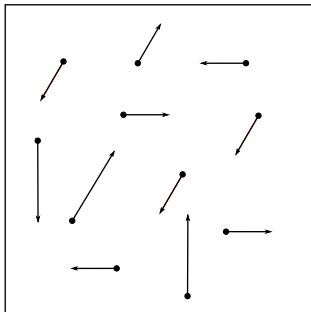
- Gęstość prądu określa liczbę neutronów przechodzącą przez wybraną jednostkową powierzchnię o wektorze normalnym równoległym z kierunkiem, na jednostkę czasu. Jednostki będą te same co dla strumienia ($1/\text{cm}^2/\text{s}$), ale interpretacja jest inna!
- Gęstość prądu można w analogiczny sposób całkować po energii i dostać całkowity strumień, lub dla wybranego zakresu.

Strumień neutronów



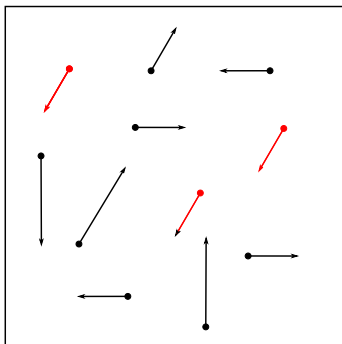
Neutrony w elemencie objętości

Strumień neutronów



Neutrony w elemencie objętości

Strumień neutronów



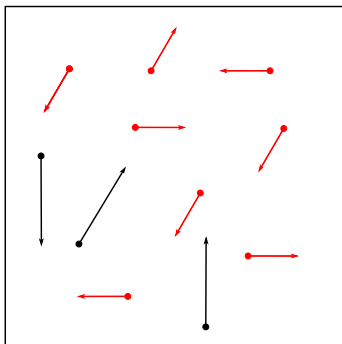
$$\Omega = \text{red arrow}$$

$$E = \text{red arrow} = 1$$

$$\Phi(r, E, \Omega) = 3$$

Suma wszystkich strzałek o tej samej długości (energii) i kierunku to kątowy strumień neutronów - $\Phi(r, E, \Omega)$

Strumień neutronów



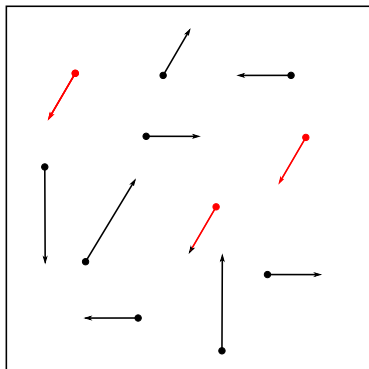
$$\int d\Omega$$

$$E = \text{---} = 1$$

$$\Phi(r, E) = 8$$

Suma wszystkich strzałek o tej samej długości niezależnie od ich kierunku to całkowity strumień neutronów o energii E - $\Phi(r, E)$

Strumień neutronów



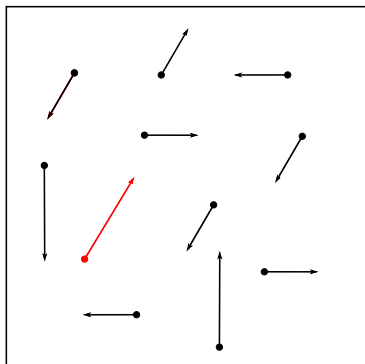
$$\Omega = \text{red arrow}$$

$$\int dE$$

$$\Phi(r, \Omega) = 3$$

Suma wszystkich strzałek o danym kierunku, ale niezależnie od ich długości to całkowity kątowy strumień neutronów $\Phi(r, \Omega)$

Strumień neutronów



$$\Omega = \text{red arrow}$$

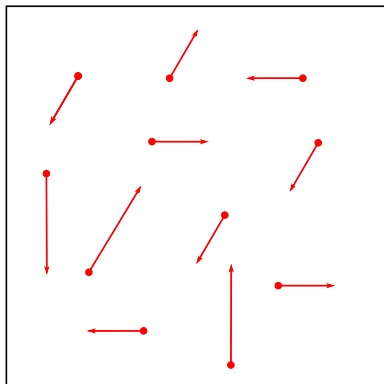
$$\int_{E_0}^{E_1} dE$$

$$\Phi_f(r, \Omega) = 2$$

Suma wszystkich strzałek o danym kierunku, i z wybranego zakresu długości, to całkowity strumień kątowy dla neutronów o wybranym zakresie energii (np. prędkich)

$$\Phi_f(r, \Omega)$$

Strumień neutronów



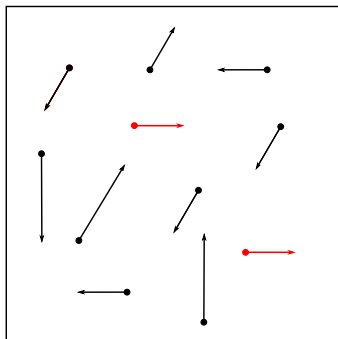
$$\int_{\Omega}$$

$$\int dE$$

$$\Phi(r) = 14$$

Suma wszystkich strzałek niezależnie od kierunku i długości to całkowity strumień neutronów $\Phi(r)$

Prąd neutronów



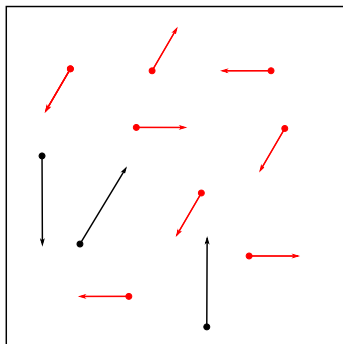
$$\Omega = \text{---} \rightarrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \text{---} \rightarrow = 1$$

$$\vec{J}(r, E, \Omega) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Suma wektorowa strzałek o tej samej długości i kierunku to kątowy prąd neutronów - $\vec{J}(r, E, \Omega)$

Prąd neutronów



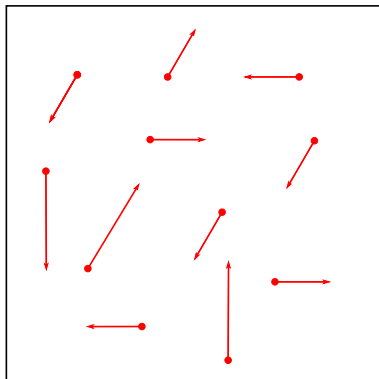
$$\int_{\Omega}$$

$$\mathbf{E} = \longrightarrow = 1$$

$$\vec{J}(\mathbf{r}, E) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Suma wektorowa strzałek o tej samej długości niezależnie od kierunku to prąd neutronów o energii E - $\vec{J}(\mathbf{r}, E)$

Prąd neutronów



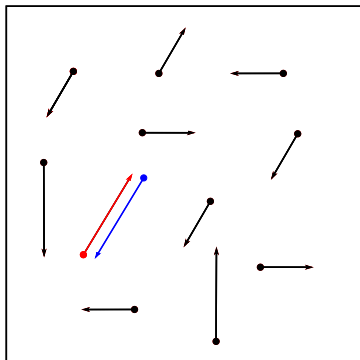
$$\int_{\Omega}$$

$$\int_{\mathbf{E}}$$

$$\vec{J}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Suma wektorowa wszystkich strzałek to całkowity prąd neutronów - $\vec{J}(\mathbf{r})$

Prąd i strumień neutronów



$$\vec{J}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = 14$$

$$\vec{J}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = 14$$

Strumień jest wielkością skalarną, a prąd - wektorową. Zależność między nimi jest nietrywialna!

Gradient, dywergencja, rotacja

- Gradient - uogólnienie pochodnej, działa na pole skalarne f , zwraca pole wektorowe, które wskazuje kierunek największego wzrostu

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{e}_z$$

- Dywergencja - działa na pole wektorowe \vec{v} , zwraca pole skalarne, które pokazuje lokalny wypływ pola wektorowego z danego punktu

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

- Rotacja - działa na pole wektorowe \vec{v} , zwraca pole wektorowe, które opisuje lokalny rotację pola wektorowego wokół danego punktu

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Laplasjan

- Laplasjan to złożenie dywergencji od gradientu pola skalarnego f

$$\nabla \cdot \vec{\nabla} f = \nabla^2 f = \Delta f$$

- W układzie kartezjańskim

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

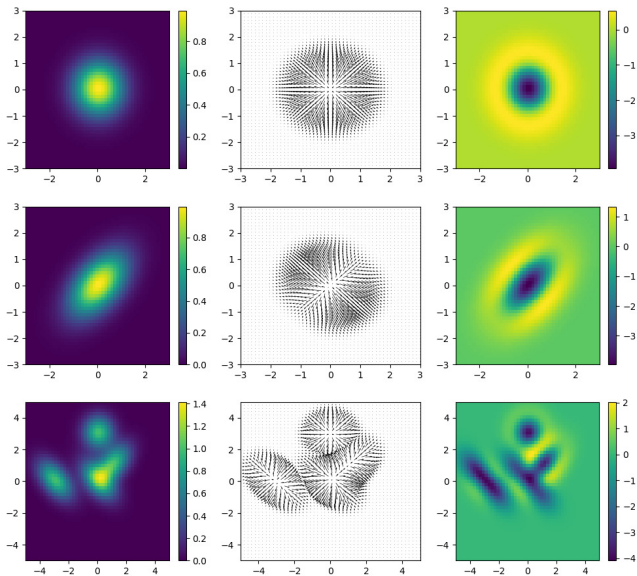
- W układzie cylindrycznym

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- W układzie sferycznym

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

Gęstość, gradient, dywergencja



Bilans neutronów

- Zmiana gęstości neutronów w pewnej wybranej objętości będzie zależeć od tego ile neutronów pochodzi
 - + źródła zawartych wewnątrz
 - + rozszczepienia zachodzące wewnątrz
 - - absorpcja zachodząca wewnątrz
 - + przychodzące z zewnątrz
 - - uciekające na zewnątrz

Bilans neutronów

- Zmiana gęstości neutronów w pewnej wybranej objętości będzie zależeć od tego ile neutronów pochodzi
 - + źródła zawartych wewnątrz
 - + rozszczepienia zachodzące wewnątrz
 - - absorpcja zachodząca wewnątrz
 - + przychodzące z zewnątrz
 - - uciekające na zewnątrz
- Dwa ostatnie elementy nazwiemy "ucieczką" (ujemna ucieczka będzie przybywanem)

Bilans neutronów

- Zmiana gęstości neutronów w pewnej wybranej objętości będzie zależeć od tego ile neutronów pochodzi
 - + źródła zawartych wewnątrz
 - + rozszczepienia zachodzące wewnątrz
 - - absorpcja zachodząca wewnątrz
 - + przychodzące z zewnątrz
 - - uciekające na zewnątrz
- Dwa ostatnie elementy nazwiemy "ucieczką" (ujemna ucieczka będzie przybywanem)
- W postaci równania będzie to wyglądać następująco

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \underbrace{S(r)}_{\text{źródła}} + \underbrace{\nu \Sigma_f(r) \Phi(r)}_{\text{rozszczepienia}} - \underbrace{\Sigma_a(r) \Phi(r)}_{\text{absorpcja}} - \underbrace{U}_{\text{ucieczka}}$$

Bilans neutronów

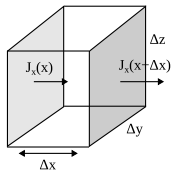
- Zmiana gęstości neutronów w pewnej wybranej objętości będzie zależeć od tego ile neutronów pochodzi
 - + źródła zawartych wewnątrz
 - + rozszczepienia zachodzące wewnątrz
 - - absorpcja zachodząca wewnątrz
 - + przychodzące z zewnątrz
 - - uciekające na zewnątrz
- Dwa ostatnie elementy nazwiemy "ucieczką" (ujemna ucieczka będzie przybywanem)
- W postaci równania będzie to wyglądać następująco

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \underbrace{S(r)}_{\text{źródła}} + \underbrace{\nu \Sigma_f(r) \Phi(r)}_{\text{rozszczenia}} - \underbrace{\Sigma_a(r) \Phi(r)}_{\text{absorpcja}} - \underbrace{U}_{\text{ucieczka}}$$

- W zasadzie wszystko jest proste, oprócz "ucieczki". Jak powiązać ten wyraz z gęstością lub strumieniem?

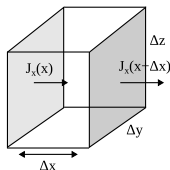
Bilans neutronów

- Wyobraźmy sobie mały sześcian, jak opisać ucieczkę neutronów z takiego kawałka przestrzeni?



Bilans neutronów

- Wyobraźmy sobie małe sześcian, jak opisać ucieczkę neutronów z takiego kawałka przestrzeni?

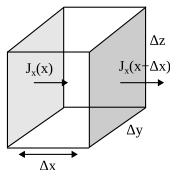


- Wzdłuż osi X ucieczka to będzie różnica między wychodzącym prądem ($J_x(x + \Delta x)$) i wchodzącym ($J_x(x)$) pomnożona przez pole powierzchni boku ($\Delta y \Delta z$). Analogiczne wyraży możemy zapisać dla kierunków y i z

$$U = [J_x(x + \Delta x) - J_x(x)]\Delta y \Delta z + [J_y(y + \Delta y) - J_y(y)]\Delta x \Delta z + [J_z(z + \Delta z) - J_z(z)]\Delta x \Delta y$$

Bilans neutronów

- Wyobraźmy sobie małe sześciątło, jak opisać ucieczkę neutronów z takiego kawałka przestrzeni?



- Wzdłuż osi X ucieczka to będzie różnica między wychodzącym prądem ($J_x(x + \Delta x)$) i wchodzącym ($J_x(x)$) pomnożona przez pole powierzchni boku ($\Delta y \Delta z$). Analogiczne wyraży możemy zapisać dla kierunków y i z

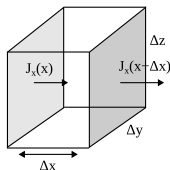
$$U = [J_x(x + \Delta x) - J_x(x)]\Delta y \Delta z + [J_y(y + \Delta y) - J_y(y)]\Delta x \Delta z + [J_z(z + \Delta z) - J_z(z)]\Delta x \Delta y$$

- Rozwijając w szereg Taylora wyraży $J(x + \Delta x)$ dostaniemy

$$U = \frac{\partial J_x}{\partial x} \Delta y \Delta z + \frac{\partial J_y}{\partial y} \Delta y \Delta z + \frac{\partial J_z}{\partial z} \Delta y \Delta z = \nabla J \cdot dx dy dz$$

Bilans neutronów

- Wyobraźmy sobie małe sześciątło, jak opisać ucieczkę neutronów z takiego kawałka przestrzeni?



- Wzdłuż osi X ucieczka to będzie różnica między wychodzącym prądem ($J_x(x + \Delta x)$) i wchodzącym ($J_x(x)$) pomnożona przez pole powierzchni boku ($\Delta y \Delta z$). Analogiczne wyraży możemy zapisać dla kierunków y i z

$$U = [J_x(x + \Delta x) - J_x(x)]\Delta y \Delta z + [J_y(y + \Delta y) - J_y(y)]\Delta x \Delta z + [J_z(z + \Delta z) - J_z(z)]\Delta x \Delta y$$

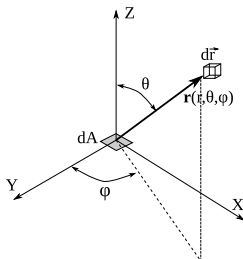
- Rozwijając w szereg Taylora wyraży $J(x + \Delta x)$ dostaniemy

$$U = \frac{\partial J_x}{\partial x} \Delta y \Delta z + \frac{\partial J_y}{\partial y} \Delta y \Delta z + \frac{\partial J_z}{\partial z} \Delta y \Delta z = \nabla J \cdot dx dy dz$$

- Co oznacza, że ucieczka jest związana z prądem. Ale w naszym równaniu nie występował jeszcze prąd, jak powiązać go ze strumieniem?

Przybliżenia w teorii dyfuzji

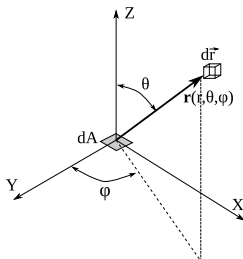
- a) Neutrony mają tę samą prędkość (brak zależności przekrojów czynnych od energii) - odpowiada to efektywnemu wycałkowaniu przekrojów czynnych
- b) Jednorodny ośrodek
- c) Strumień neutronów wolno zmienny w przestrzeni
- d) Absorbcja mała w porównaniu do rozpraszania ($\Sigma \approx \Sigma_s$)
- e) Rozpraszanie izotropowe



- Liczba rozprożeń w elemencie objętości $d\vec{r} = r^2 dr d\theta d\psi$ na jednostkę czasu to

$$\Sigma_s \Phi dr$$

gdzie Σ_s to przekrój czynny na rozproszenie, a $\Phi = nv$ to strumień neutronów



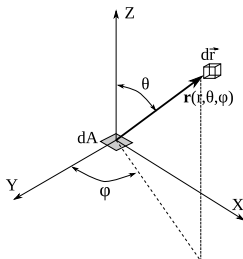
- Liczba rozprożeń w elemencie objętości $d\vec{r} = r^2 dr d\cos\theta d\psi$ na jednostkę czasu to

$$\Sigma_s \Phi dr$$

gdzie Σ_s to przekrój czynny na rozproszenie, a $\Phi = nv$ to strumień neutronów

- Część rozproszonych neutronów opuszczających $d\vec{r}$ i kierujących się w stronę elementu płaszczyzny $d\vec{A}$

$$-\frac{\vec{r}}{r} \frac{d\vec{A}}{4\pi r^2} = \cos\theta \frac{dA}{4\pi r^2}$$



- Liczba rozprożeń w elemencie objętości $d\vec{r} = r^2 dr d\cos\theta d\psi$ na jednostkę czasu to

$$\Sigma_s \Phi dr$$

gdzie Σ_s to przekrój czynny na rozproszenie, a $\Phi = nv$ to strumień neutronów

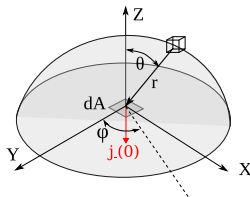
- Część rozproszonych neutronów opuszczających $d\vec{r}$ i kierujących się w stronę elementu płaszczyzny $d\vec{A}$

$$-\frac{\vec{r}}{r} \frac{d\vec{A}}{4\pi r^2} = \cos\theta \frac{dA}{4\pi r^2}$$

- Prawdopodobieństwo osiągnięcia $d\vec{A}$ to

$$e^{-\Sigma r}$$

Ucieczka (2)



- Łącznie prąd neutronów skierowany do dołu, którego źródłem jest element $d\vec{r}$

$$j_{-}(0 : r, \mu, \psi) = \frac{\mu e^{-\Sigma_s r} \Sigma_s \Phi(r, \mu, \psi) d\vec{r} dA}{4\pi r^2}$$

gdzie $\mu = \cos \theta$

- Całkowity prąd jest wynikiem przecalkowania po objętości powyżej płaszczyzny $x = 0$

$$j_{-}(0) dA = \Sigma_s \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^1 d\mu \mu e^{-\Sigma_s r} \phi(r, \mu, \psi) \frac{dA}{4\pi}$$

- Strumień ϕ rozwijamy w szereg Taylora

$$\phi(\vec{r}) = \phi(0) + \vec{r} \nabla \phi(0) + \frac{1}{2} r^2 \nabla^2 \phi(0) + \dots$$

Ucieczka (3)

- Korzystając z założenia (c), bierzemy dwa pierwsze wyrazy rozwinięcia, z założenia (d) bierzemy $\Sigma_s = \Sigma$, wtedy wynikiem całkowania jest

$$j_-(0) = \frac{1}{4}\phi(0) + \frac{1}{6\Sigma_s} \frac{d\phi(0)}{dx} \equiv \frac{1}{4}\phi(0) + \frac{1}{2}D \frac{d\phi(0)}{dx}$$

gdzie $D = 1/3\Sigma_s$ jest parametrem dyfuzji

Ucieczka (3)

- Korzystając z założenia (c), bierzemy dwa pierwsze wyrazy rozwinięcia, z założenia (d) bierzemy $\Sigma_s = \Sigma$, wtedy wynikiem całkowania jest

$$j_-(0) = \frac{1}{4}\phi(0) + \frac{1}{6\Sigma_s} \frac{d\phi(0)}{dx} \equiv \frac{1}{4}\phi(0) + \frac{1}{2}D \frac{d\phi(0)}{dx}$$

gdzie $D = 1/3\Sigma_s$ jest parametrem dyfuzji

- W analogiczny sposób wyprowadzamy prąd skierowany ku górze

$$j_+(0) = \frac{1}{4}\phi(0) - \frac{1}{2}D \frac{d\phi(0)}{dx}$$

- Łącznie prąd neutronów przez płaszczyznę $x = 0$ to

$$J_x = j_+(0) - j_-(0) = -D \frac{d\Phi(x)}{dx}$$

- Wykorzystując założenie (e) o izotropowości można uzyskać analogiczne wyniki w płaszczyznach Y i Z oraz całkowity prąd neutronów

$$\vec{J}(0) = -D\nabla\phi(0)$$

i jest analogiczne do prawa Ficka wyprowadzonego dla gazów.

Równanie dyfuzji neutronów

Stosując przybliżenia

- a) Wszystkie neutrony mają tę samą prędkość (efektywne przekroje czynne)
- b) Ośrodek jest jednorodny
- c) Strumień jest wolno zmienny w przestrzeni
- d) Absorpcja jest mała w porównaniu do rozpraszania ($\Sigma_a \ll \Sigma_{el}$)
- e) Rozpraszanie jest izotropowe

Otrzymujemy następujący związek

$$\vec{J} = -\frac{1}{3\Sigma_{el}} \vec{\nabla} \Phi$$

Oraz łącznie

Równanie dyfuzji neutronów

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \underbrace{S(r)}_{\text{źródła}} + \underbrace{\nu\Sigma_f(r)\Phi(r)}_{\text{rozszczenia}} - \underbrace{\Sigma_a(r)\Phi(r)}_{\text{absorpcja}} + \underbrace{D(r)\Delta\Phi(r)}_{\text{dyfuzja}}$$

Równanie dyfuzji neutronów (2)

- Warunki zszycia obszarów (1) i (2) rozdzielonych źródłem neutronów o intensywności S_0 (w $x = 0$)

- Zszycie strumienia

$$\Phi_1(0) = \Phi_2(0)$$

- Zszycie prądu

$$J_2(0) = J_1(0) + S_0$$

- Warunki brzegowe ustalamy poprzez porównanie wchodzącej gęstości neutronów na granicy i jej zależności od strumienia. Np. dla materiału na lewo od granicy w x_b , prąd wchodzący do materiału

$$j_-(x_b) = \frac{1}{4}\Phi(x_b) + \frac{1}{2}D\frac{d\Phi(x_b)}{dx}$$

- W szczególności dla granicy z próżnią ($j_-(x_b) = 0$)

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d\Phi}{dx} \Big|_{x_b} = -\frac{1}{2D} = -\frac{3\Sigma_s}{2}$$

Płaszczyzna (1)

- Wyobraźmy sobie źródło neutronów w postaci nieskończonej płaszczyzny ZY o intensywności S_0 umieszczone w jednorodnym nierozszczepialnym ośrodku o parametrze dyfuzji D i przekroju czynnym na absorpcję Σ_a . Równanie dyfuzji, dla stanu stacjonarnego, dla dowolnego punktu, poza $x = 0$ przyjmie postać

$$-\Sigma_a \Phi + D \Delta \Phi = 0$$

lub ($L^2 \equiv D/\Sigma_a$)

$$\frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} - \frac{1}{L^2} \Phi(x) = 0$$

- Po podstawieniu funkcji $\exp(\alpha x)$ otrzymamy rozwiązanie w postaci

$$\Phi(x) = A \exp(-x/L) + B \exp(x/L)$$

Płaszczyzna (2)

- Stałe A i B otrzymamy rozpatrując warunki brzegowe.
- Warunek brzegowy dla $x = 0$ otrzymamy porównując prąd częściowy skierowany w prawo $j_+(0)$ z intensywnością źródła S_0

$$j_+(0) = \frac{1}{4}\Phi(0) - \frac{1}{2}D\frac{d\Phi}{dx} = \frac{A}{4} + \frac{B}{4} + \frac{DA}{2L} - \frac{DB}{2L} = \frac{S_0}{2}$$

- Drugi warunek brzegowy wynika z konieczności spadku strumienia do zera w nieskończoności - stała przy wyrazie rozbieżnym do nieskończoności musi być 0

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

- Stąd pierwszy warunek przyjmuje postać

$$A + \frac{2DA}{L} = 2S_0$$

- I otrzymujemy rozwiązanie

$$\Phi(x) = \frac{2S_0}{1 + \frac{2D}{L}} \exp|-x/L|$$

Płaszczyzna (3)

- W przypadku ośrodka skończonego w osi X , o grubości a warunek brzegowy dla $x = 0$ pozostanie bez zmian
- Dla krawędzi ośrodka (poza ośrodkiem jest próżnia) warunek rozpatrzmy jako brak prądu częściowego wchodzącego („w lewo”)

$$j_-(a) = \frac{1}{4}\Phi(a) + \frac{1}{2}D\frac{d\Phi(a)}{dx} = 0$$

czyli

$$\frac{A}{4}\exp(-a/L) + \frac{B}{4}\exp(a/L) - \frac{DA}{2L}\exp(-a/L) + \frac{DB}{2L}\exp(a/L) = 0$$

- Z rozwiązania układu równań otrzymamy

$$A = \frac{2S_0 \left(\frac{2D}{L} + 1\right) \exp(2a/L)}{\left(\frac{2D}{L} + 1\right)^2 \exp(2a/L) - \left(\frac{2D}{L} - 1\right)^2}$$
$$B = \frac{2S_0 \left(\frac{2D}{L} - 1\right)}{\left(\frac{2D}{L} + 1\right)^2 \exp(2a/L) - \left(\frac{2D}{L} - 1\right)^2}$$

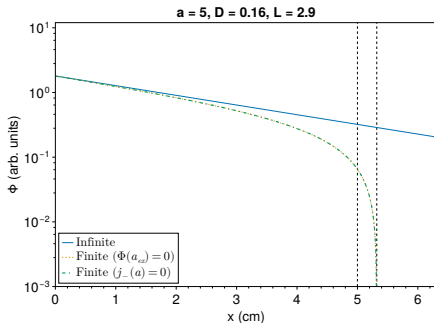
- Dla $a \rightarrow \infty$ rozwiązanie zbiega do otrzymanego wcześniej rozwiązania dla nieskończonego ośrodka

Płaszczyzna (4)

- W praktyce często stosowany jest uproszczony warunek brzegowy z próżnią, mianowicie zakładamy, że w pewnej odległości $a' = a + \lambda_{ex}$ strumień spada do 0.
- Ekstrapolowana odległość wynika z pochodnej strumienia na granicy i powinna być równa $\lambda_{ex} = 2D = \frac{2}{3\Sigma_s}$
- Ten warunek, dla zagadnienia z płaszczyzną da równania na współczynniki rozwiązań

$$\begin{cases} A = \frac{2S_0 \exp(2a/L)}{(\frac{2D}{L} + 1)^2 \exp(2a/L) + (\frac{2D}{L} - 1)} \\ B = \frac{2S_0}{(1 - \frac{2D}{L}) - (\frac{2D}{L} + 1) \exp(2a/L)} \end{cases}$$

- Różnica między pełnym, a ekstrapolowanym warunkiem jest minimalna (o ile $L \gg D$)



Linia (1)

- Wyobraźmy sobie źródło neutronów w postaci nieskończonej linii wzdłuż osi Z o intensywności liniowej S_l umieszczone w jednorodnym nierozszczepialnym ośrodku o parametrze dyfuzji D i przekroju czynnym na absorpcję Σ_a .
- Równanie dyfuzji, dla stanu stacjonarnego, dla dowolnego punktu, poza $z = 0$, rozważamy w układzie cylindrycznym.
- Ze względu na symetrię ϕ, z wystarczy rozwiązanie (jak poprzednio $L^2 \equiv D/\Sigma_a$)

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\Phi(\rho)}{d\rho} \right) - \frac{1}{L^2} \Phi(\rho) = 0$$

- Równanie przekształcamy do postaci

$$\rho^2 \frac{d^2\Phi(\rho)}{d\rho^2} + \rho \frac{d\Phi(\rho)}{d\rho} - \frac{\rho^2}{L^2} \Phi(\rho) = 0$$

lub ($x = \rho/L$)

$$x^2 \frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} + x \frac{d\Phi(x)}{dx} - x^2 \Phi(x) = 0$$

Równanie Bessela

- Równanie Bessela rzędu ν ma postać

$$x^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + x \frac{df}{dx} + (x^2 + \nu^2)f = 0$$

- Rozwiązania to (funkcje Bessla pierwszego i drugiego rodzaju)

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$$

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}$$

- Równanie postaci

$$x^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + x \frac{df}{dx} - (x^2 + \nu^2)f = 0$$

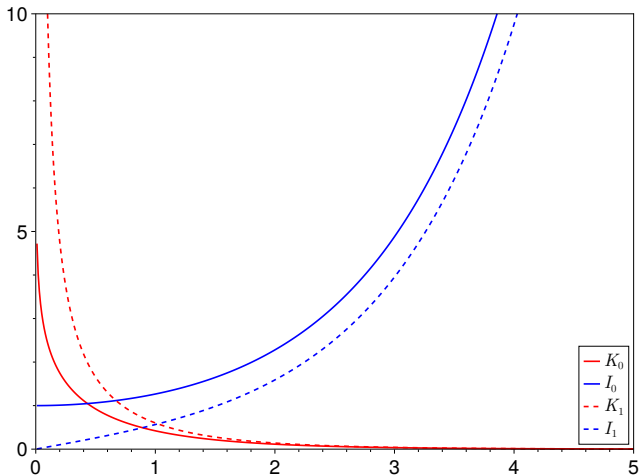
nazywa się zmodyfikowanym równaniem Bessela rzędu ν

- Którego rozwiązania są następujące

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m! \Gamma(m + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$$

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \nu\pi}$$

Zmodyfikowane funkcje Bessela



Linia (2)

- Rozwiązaniem będzie zatem liniowa kombinacja zmodyfikowanych funkcji Bessela pierwszego i drugiego rodzaju

$$\Phi(\rho) = AI_0(\rho/L) + BK_0(\rho/L)$$

- Stałe A i B podobnie otrzymamy z warunków brzegowych.
- Z warunku $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \Phi(\rho) = 0$ dostaniemy $A = 0$ (funkcja I_0 jest rozbieżna do ∞).
- Drugi warunek brzegowy to

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} 2\pi rJ = S_l$$

gdzie S_l to intensywność liniowa źródła określona na jednostkę długości (1/cm/s)

- Ponieważ pochodna $\frac{dK_0}{dx} = -K_1(x)$ dostaniemy

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{BD2\pi}{L} K_1(\rho/L) = \left(\lim_{x \rightarrow 0} xK_1(x) = 1 \right) = \frac{BD2\pi}{L^2} = S_l$$

- I rozwiązanie

$$\Phi(\rho) = \frac{S_l K_0(\rho/L)}{2\pi D}$$

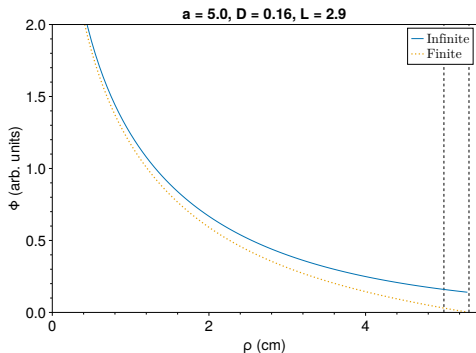
Linia (3)

- Dla ośrodka w kształcie cylindra o promieniu a warunek brzegowy dla $\rho = 0$ pozostanie ten sam, natomiast drugi warunek zastosujemy w postaci uproszczonej tj.

$$\Phi(a') = 0$$

- Stąd rozwiązaniem będzie (używamy własności $\frac{dI_0}{dx} = -I_1(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} xI_1(x) = 0$ oraz $\lim_{x \rightarrow 0} xK_1(x) = 1$)

$$\Phi(\rho) = \frac{S_1 L}{2\pi D} \left[K_0(\rho/L) - \frac{K_0(a'/L)}{I_0(a'/L)} I_0(\rho/L) \right]$$



Punkt (1)

- Wyobraźmy sobie źródło neutronów w postaci punktu w środku układu, o całkowitej intensywności S_t , umieszczone w jednorodnym nierozszczepialnym ośrodku o parametrze dyfuzji D i przekroju czynnym na absorpcję Σ_a .
- Równanie dyfuzji, dla stanu stacjonarnego, dla dowolnego punktu, poza $z = 0$, rozważamy w układzie sferycznym.
- Ze względu na symetrię ϕ, θ wystarczy rozwiązanie równania (jak poprzednio $L^2 \equiv D/\Sigma_a$):

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi(r)}{dr} \right) - \frac{1}{L^2} \Phi(r) = 0$$

- Standardowe rozwiązanie tego równania odbywa się przez podstawienie $\Phi = \frac{u}{r}$, co pozwala uproszczyć je do postaci

$$\frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{1}{L^2} u = 0$$

- Rozwiązania mamy zatem postaci

$$\Phi(r) = \frac{A \exp(r/L) + B \exp(-r/L)}{r}$$

- Po zastosowaniu warunków brzegowych ($r \rightarrow \infty$ i $r \rightarrow 0$) otrzymujemy

$$\Phi(r) = \frac{S_t}{4\pi D r} \exp(-r/L)$$

Zadanie

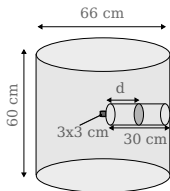
Na pracowni fizycznej dla zaawansowanych znajduje się źródło neutronów plutonowo-berylowe. Źródło jest niewielką pastylką 3×3 cm, otoczoną moderatorem w kształcie cylindra o średnicy 66 cm i wysokości 60 cm wykonanego z parafiny. Jednym z ćwiczeń na pracowni jest pomiar strumienia neutronów w funkcji odległości od źródła, detektorem LiI, który jest czuły głównie na neutrony termiczne. Przykładowe wyniki podane są poniżej (niepewności są rzędu 5%).

d (cm)	Φ (1/cm ² /s)
0	2100
6	2200
12	1700
18	1100
24	690
30	370

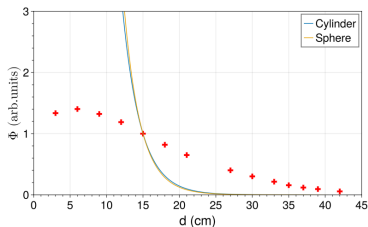
Sprawdzić jaka z rozwiązanych geometrii (płaszczyzna, cylinder, sfera) najlepiej opisuje otrzymane wartości.

Rozwiązanie

- Geometria układu sugeruje użycie rozwiązania dla cylindra (ale źródło nie jest liniowe) lub sfery (ale moderator nie jest sferyczny).



- Zakładamy, że typową cząsteczką parafiny jest $C_{32}H_{66}$, a jej gęstość to 0.915 g/cm^3 i na tej podstawie wyznaczamy makroskopowe przekroje czynne (parametry dla neutronów termicznych z wykładu 2) oraz parametry modelu dyfuzji: $L = 2.77 \text{ cm}$, $D = 0.18 \text{ cm}$
- Niestety żadna z opcji nie wyjaśnia nawet w przybliżeniu zmierzonego kształtu strumienia



Długość dyfuzji

- Dla rozpatrywanych geometrii źródła (płaszczyzna, punkt) w nieskończonym ośrodku policzymy średni kwadrat odległości od źródła przebytej przez neutron do momentu absorpcji.
- Dla płaszczyzny (jeden wymiar)

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\int_0^\infty x^2 \Sigma_a \Phi dx}{\int_0^\infty \Sigma_a \Phi dx}$$

$$\langle x^2 \rangle = 2L^2$$

- Dla punktu (trzy wymiary)

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\int_0^\infty r^2 4\pi r^2 \Sigma_a \Phi dr}{\int_0^\infty \Sigma_a \Phi 4\pi r^2 dr}$$

$$\langle r^2 \rangle = 6L^2$$

- Dostajemy, że wielkość L jest powiązana z kwadratem przebytej drogi jak

$$L = \sqrt{\frac{\langle r^2 \rangle}{6}}$$

Długość dyfuzji

- Ponieważ neutrony powstają jako neutrony prędkie (w reaktorach - o energii około 1 MeV), mogą przebyć pewną odległość zanim zostaną stermalizowane. Odległość, $\sqrt{\tau_{th}}$ ze względów historycznych, nazywana jest "wiekiem termalizacji" (*age to thermal*). Łącznie długość dyfuzji i τ daje długość migracji M

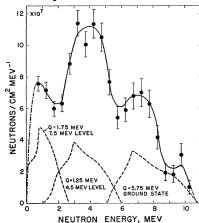
$$\langle r^2 \rangle = 6(\tau_{th} + L^2) \equiv 6M^2$$

- Parametry modelu dyfuzji dla typowych moderatorów

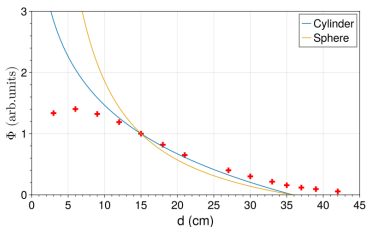
Material	ρ (g/cm ³)	D (cm)	Σ_a (1/cm)	L (cm)	M (cm)
H ₂ O	1.0	0.16	2.0×10^{-2}	2.9	5.8
D ₂ O	1.1	0.87	2.9×10^{-5}	170	170
grafit	1.6	0.84	2.4×10^{-4}	59	62

Rozwiązanie

- Stosując podobne rozumowanie do naszego źródła neutronów możemy obliczyć efektywny przekrój czynny dla neutronów emitowanych ze źródła Pu-Be



- Parametry modelu dyfuzji dla dodanego wieku do termalizacji dla takich neutronów to $L = 511$ cm, $D = 1.41$ cm
- Kształt strumienia dla geometrii cylindrycznej zaczyna przypominać zmierzony strumień, z dokładnością do skończonego rozmiaru źródła (w rozwiązaniu mamy nieskończoną linię), oraz efektów związanych z otworem w moderаторze.



Strumień neutronów od rozkładu źródeł

- W niemnożącym, jednorodnym ośrodku strumień w punkcie r , od pewnego rozkładu źródeł może być policzony jako suma przyczynków od źródeł umieszczonych w r'

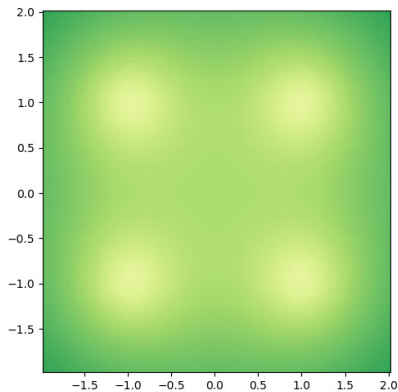
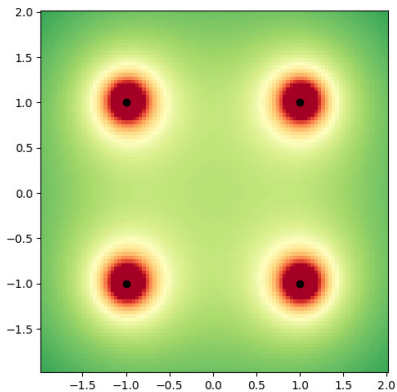
$$\Phi(r) = \int \Phi(r : r') S_0(r') dr'$$

- Poszczególne proste kształty dają następujące przyczynki

Źródło	Strumień
Płaszczyzna YZ	$\Phi(x : x') = \frac{2LS_0}{2D+L} \exp\left(-\frac{ x-x' }{L}\right)$
Liniowe w osi Z	$\Phi(r : r') = \frac{S_l K_0 \left(-\frac{ r-r' }{L}\right)}{2\pi D}$
Punktowe	$\Phi(r : r') = \frac{S_l \exp\left(-\frac{ r-r' }{L}\right)}{4\pi r-r' D}$

Rozkład źródeł

- Przykład strumienia pochodzącego od czterech źródeł leżących na płaszczyźnie $z = 0$ ($x, y = \pm 1$).



- Strumień obliczony dla płaszczyzny $z = 0$ i $z = 1$.