

Część IX - metody numeryczne

Rozwiązanie numeryczne równania dyfuzji

- Nasz problem jednowymiarowy wygląda następująco: szukamy stanu stacjonarnego równania

$$-\frac{d}{dx}D(x)\frac{d\Phi(x)}{dx} + \Sigma_a(x)\Phi(x) - \nu\Sigma_f(x)\Phi(x) = 0$$

z warunkami brzegowymi $\Phi(0) = 0$, $\Phi(a) = 0$.

- Zamieniamy problem na samozgodny

$$-\frac{d}{dx}D(x)\frac{d\Phi(x)}{dx} + \Sigma_a(x)\Phi(x) = \frac{1}{\lambda}\nu\Sigma_f(x)\Phi(x) \equiv S(x) \quad \star$$

gdzie λ to nieznaną stałą.

- W rozwiązaniu zgadujemy początkowe $\Phi_1(x)$ i λ_1 , wyliczamy prawą stronę równania $S_1(x)$.
 - Rozwiązując zagadnienie $A\Phi = S$ (gdzie A to operator lewej strony równania) dostajemy nowe rozwiązanie Φ_2 .

- Wyznaczamy λ_2

$$\lambda_2 = \frac{S_1(x)\lambda_1}{\nu\Sigma_f(x)\Phi_2(x)}$$

- Z λ_2 i Φ_2 wyznaczamy S_2

- Powtarzamy, aż $|\lambda_{i+1} - \lambda_i| < \epsilon$ gdzie ϵ to z góry założona dokładność rozwiązania

Rozwiązanie numeryczne równania dyfuzji

- Numeryczne rozwiązanie wymaga dyskretyzacji przestrzeni. Będziemy szukać rozwiązania w pewnych punktach x_1, x_2, \dots, x_n . W ogólności odległości między punktami mogą być różne (zasadniczo należy je tak dobrać, aby $\Delta_i < L_i$). Na razie przyjmujemy równoodległe punkty Δ .
- Szukanym rozwiązaniem jest zbiór wartości $\Phi(x_i) \equiv \Phi_i$
- Wyrazy w równaniu (*) zamienimy na średnie wartości w otoczeniu poszczególnych punktów $x_i \pm \Delta/2$

$$\Sigma_a(x)\Phi(x) \approx \Sigma_{ai}\Phi_i\Delta$$

$$\frac{1}{\lambda}\nu\Sigma_f(x)\Phi(x) \approx \frac{1}{\lambda}\nu\Sigma_{fi}\Phi_i\Delta = S_i\Delta$$

$$\frac{d}{dx}D(x)\frac{d\Phi(x)}{dx} \approx \frac{1}{2}(D_i + D_{i+1})\frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{\Delta} - \frac{1}{2}(D_{i-1} + D_i)\frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{\Delta}$$

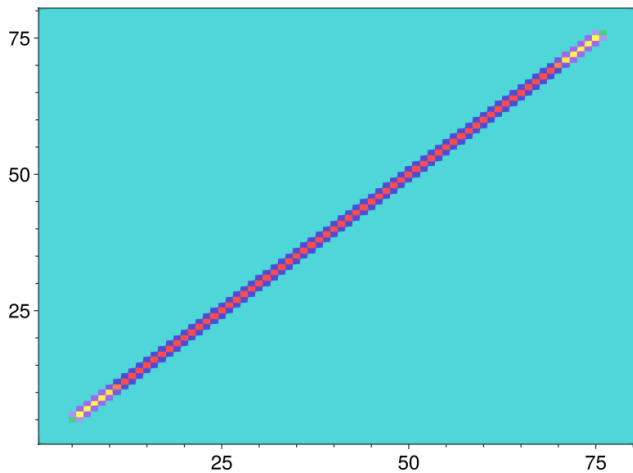
- Jak widać strumień w punkcie i jest zależny jedynie od strumienia w sąsiednich punktach $i \pm 1$
- W rezultacie nasz operator lewej strony równania - macierz A - działający na wektor Φ , ma niezerowe wyrazy jedynie na głównej przekątnej oraz bezpośrednio nad i pod nią

$$a_{i,i} = \Sigma_{ai} + \frac{D_{i-1} + 2D_i + D_{i+1}}{2\Delta^2}$$

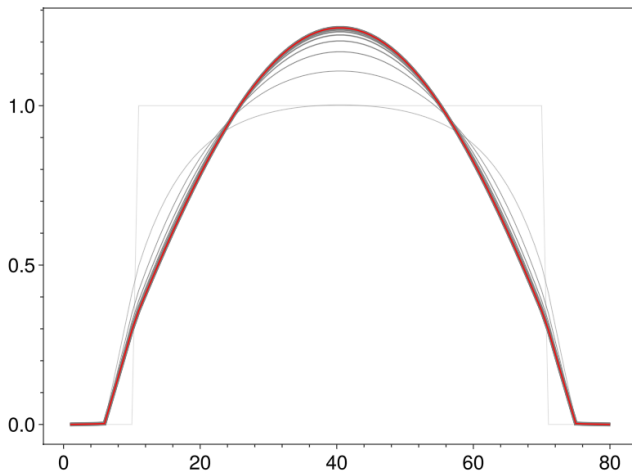
$$a_{i,i-1} = -\frac{D_i + D_{i-1}}{2\Delta^2}$$

$$a_{i,i+1} = -\frac{D_{i+1} + D_i}{2\Delta^2}$$

Macierz problemu 1D



Przykładowe rozwiązania problemu 1D



Rozwiązanie numeryczne równania dyfuzji 2D

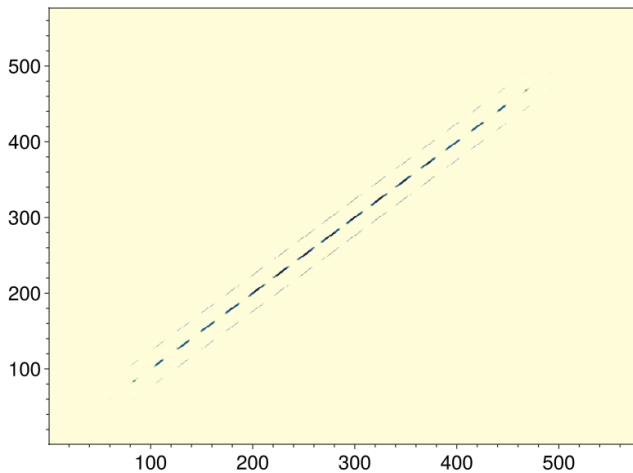
W przestrzeni dwuwymiarowej procedura wygląda analogicznie

- Dokonujemy podziału odcinka $(0, a)$ wzdłuż x co Δ_x , oraz $(0, b)$ wzdłuż y co Δ_y .
Otrzymujemy punkty $x_{1,1}, x_{1,2}, x_{2,1}, \dots, x_{n,m}$.
- Szukanym rozwiązaniem jest zbiór wartości $\Phi(x_i, x_j) \equiv \Phi_{i,j}$
- Główną różnicą jest wyraz

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} D(x) \frac{d\Phi(x)}{dx} &\approx \Phi_{i-1,j} \frac{(D_{i-1,j} + D_{i,j})}{2\Delta_x^2} + \Phi_{i+1,j} \frac{(D_{i,j} + D_{i+1,j})}{2\Delta_x^2} \\ &+ \Phi_{i,j-1} \frac{(D_{i,j-1} + D_{i,j})}{2\Delta_y^2} + \Phi_{i,j+1} \frac{(D_{i,j} + D_{i,j+1})}{2\Delta_y^2} \\ &- \Phi_{i,j} \frac{D_{i-1,j} + 2D_{i,j} + D_{i+1,j}}{2\Delta_x^2} - \Phi_{i,j} \frac{D_{i,j-1} + 2D_{i,j} + D_{i,j+1}}{2\Delta_y^2} \end{aligned}$$

- Strumień w punkcie i, j jest zatem zależny od strumienia w sąsiednich punktach $i \pm 1, j \pm 1$
- Jeżeli punkty (i, j) ułożymy teraz w kolejności $k = i + jn$, to znowu dostaniemy dwuwymiarową macierz operatora A , ale dodatkowe niezerowe wyrazy pojawiają się na dwóch przekątnych poniżej i poniżej głównej.
- Podobne rozumowanie dla problemu 3D wprowadzi kolejne dwie niezerowe przekątne.

Macierz problemu 2D



Metoda węzłów

- W metodzie węzłów odchodzimy od regularnej siatki, na rzecz dowolnie wybranych obszarów (najlepiej o podobnych własnościach).
- Macierz opisująca problem, dla wielkości które nie zależą od sąsiednich obszarów będzie zawierać to uśrednione własności np.

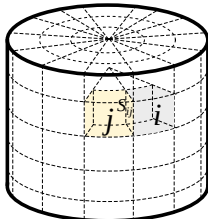
$$\Phi_n = \frac{1}{V_n} \int_{V_n} \Phi(r) d^3 r$$

$$\Sigma_{a,n} = \frac{1}{\Phi_n V_n} \int_{V_n} \Sigma_a(r) \Phi(r) d^3 r$$

- Natomiast sprzężenie pomiędzy komórkami (przepływ) wyliczamy, zakładając, że gradient strumienia jest proporcjonalny do różnicy średniego strumienia (Φ_i) w danych obszarach,

$$-\alpha_{ij}(\Phi_i - \Phi_j) = \int_{S_{ij}} d\vec{s} \cdot D\nabla\Phi$$

gdzie S_{ij} to powierzchnia łącząca obszary i, j .



Metoda węzłów

- W najprostszym przybliżeniu parametry sprzężeń α_{ij} można wyliczyć biorąc średnią wartość współczynnika dyfuzji na granicy pomiędzy komórką i i j oraz odległość między ich środkami d_{ij}

$$\alpha_{ij} = \frac{S_{ij} \frac{1}{2} (D_i + D_j)}{d_{ij}}$$

- Łącznie dostaniemy układ N równań na średni strumień w ustalonych obszarach, gdzie i -te równanie ma postać

$$-\sum_j \alpha_{ij} \Phi_j \left(\sum_j \alpha_{ij} + \Sigma_{a,i} V_i \right) \Phi_i = \frac{1}{\lambda} \nu \Sigma_{f,i} V_i \Phi_i,$$

gdzie niezerowe wartości α_{ij} będą się pojawiać dla sąsiadujących ze sobą obszarów.

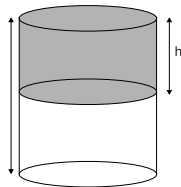
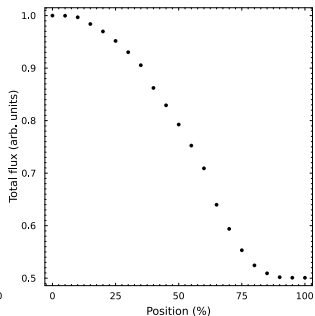
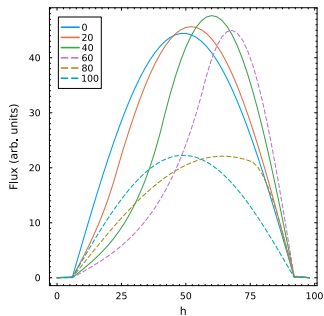
- Dalszy sposób rozwiązywania jest analogiczny jak w poprzednich metodach.
- W bardziej zaawansowanych metodach stosowane są przede wszystkim lepsze przybliżenia wyznaczania współczynników α_{ij} .

Problem

Przykładowe problemy do rozwiązania metodą numeryczną

- a) Zależność strumienia od sposobu ułożenia dwóch rodzajów paliwa (mniej i bardziej wzbogaconego)
- b) Zależność strumienia od położenia prętów kontrolnych w reaktorze
- c) Strumień w siatce paliwo-moderator (nieskończonej)
- d) Porównanie rozwiązania wybranego problemu analitycznego i numerycznego
- e) Metoda węzłów dla podziału reaktora cylindrycznego na sektory kątowe i wzdłuż promienia

Przykład



Profil strumienia neutronów w zależności od położenia prętów (w % wysokości reaktora), oraz całkowity strumień neutronów wyznaczony w numerycznym rozwiązaniu modelu dyfuzji.