

Część XI - równanie transportu

Równanie transportu

- Liczba neutronów w objętości d^3r wokół \vec{r} o energii dE wokół E poruszających się w kierunku $\hat{\Omega} \pm d\Omega$ w czasie t

$$n(\vec{r}, E, \hat{\Omega}t) d^3r dE d\hat{\Omega}$$

- Gdybyśmy znali tę wielkość, moglibyśmy obliczyć wszystkie interesujące nas wielkości
 - Strumień neutronów

$$\varphi(\vec{r}, E, \hat{\Omega}t) \equiv v n(\vec{r}, E, \hat{\Omega}t)$$

- Prąd neutronów

$$\vec{j}(\vec{r}, E, \hat{\Omega}t) \equiv v \hat{\Omega} n(\vec{r}, E, \hat{\Omega}t)$$

- Prędkość reakcji

$$R(\vec{r}, E, \hat{\Omega}t) = \Sigma(\vec{r}, E) \varphi(\vec{r}, E, \hat{\Omega}t)$$

Równanie transportu (2)

- Wyobraźmy sobie pewną objętość V otoczoną powierzchnią S .
- Mechanizmy zmiany liczby neutronów w objętości V
 - 1 Źródła (w tym rozszczepienie) wewnątrz V
 - 2 Neutrony ulegające reakcji wewnątrz V (niezależnie czy prowadzi do absorpcji czy rozszczepienia, nastąpi zmiana E lub $\hat{\Omega}$).
 - 3 Neutrony o energii E' , $\hat{\Omega}'$ wewnątrz V rozproszone do E , $\hat{\Omega}$
 - 4 Neutrony wchodzące lub wychodzące przez powierzchnię S

Równanie transportu (3)

- 1 Prędkość pojawiania się neutronów w d^3r wokół \vec{r} o energii dE wokół E poruszających się w kierunku $\hat{\Omega} \pm d\Omega$

$$s(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t) d^3r dE d\hat{\Omega}$$

w objętości V

$$\left[\int_V S(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t) d^3r \right] dE d\hat{\Omega}$$

- 2 Straty w wyniku reakcji

$$\Sigma_{tot}(\vec{r}, E) v n(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t)$$

w objętości V

$$\left[\int_V \Sigma_{tot}(\vec{r}, E) v n(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t) d^3r \right] dE d\hat{\Omega}$$

- 3 Zysk z rozpraszania z energii E' i kąta $\hat{\Omega}'$

$$\left[\int_V v' \Sigma_s(E' \rightarrow E, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}) n(\vec{r}, E', \hat{\Omega}', t) d^3r \right] dE d\hat{\Omega}$$

dla rozpraszania z dowolnej innej energii

$$\left[\int_V d^3r \int_{4\pi} d\Omega' \int_0^\infty v' \Sigma_s(E' \rightarrow E, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}) n(\vec{r}, E', \hat{\Omega}', t) d^3r \right] dE d\hat{\Omega}$$

Równanie transportu (4)

- 4 Wpływ i wypływ z objętości V .
Ucieczka przez element powierzchni $d\vec{S}$

$$j(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t) d\vec{S} = v\hat{\Omega}n(\vec{r}, E', \hat{\Omega}', t)$$

stąd całkowita zmiana liczby neutronów

$$\int_S d\vec{S} v\hat{\Omega}n(\vec{r}, E', \hat{\Omega}', t)$$

Ta całka, w odróżnieniu od poprzednich jest po S . Za pomocą twierdzenia Gaussa możemy ją zamienić na całkę po V

$$\int_S d\vec{S} \vec{A}(r) = \int_V d^3r \nabla \cdot \vec{A}(r)$$

$$\begin{aligned} \left[\int_S d\vec{S} v\hat{\Omega}n(\vec{r}, E', \hat{\Omega}', t) \right] dEd\hat{\Omega} &= \left[\int_V d^3r \nabla v\hat{\Omega}n(\vec{r}, E', \hat{\Omega}', t) \right] dEd\hat{\Omega} = \\ &= \left[\int_V d^3r v\hat{\Omega} \nabla n(\vec{r}, E', \hat{\Omega}', t) \right] dEd\hat{\Omega} \end{aligned}$$

Równanie transportu (5)

- Łącząc wszystkie elementy

$$\int_V d^3r \left[\frac{\partial n}{\partial t} + v\hat{\Omega}\nabla n(r, E, \hat{\Omega}, t) + v\Sigma_{tot}n(r, E, \hat{\Omega}, t) - \int_V d^3r \int_{4\pi} d\Omega' \int_0^\infty v'\Sigma_s(E' \rightarrow E, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega})n(\vec{r}, E', \hat{\Omega}', t) - s(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t) \right] dEd\hat{\Omega} = 0$$

- Objętość V była wybrana dowolnie. Aby równanie było spełnione dla dowolnej objętości, funkcja pod całką musi być równa zero.

$$\frac{\partial n}{\partial t} + v\hat{\Omega}\nabla n(r, E, \hat{\Omega}, t) + v\Sigma_{tot}n(r, E, \hat{\Omega}, t) = \int_{4\pi} d\Omega' \int_0^\infty v'\Sigma_s(E' \rightarrow E, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega})n(\vec{r}, E', \hat{\Omega}', t) + s(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t)$$

- Postać w zależności od strumienia neutronów

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \hat{\Omega}\nabla\varphi(r, E, \hat{\Omega}, t) + \Sigma_{tot}\varphi(r, E, \hat{\Omega}, t) = \int_{4\pi} d\Omega' \int_0^\infty \Sigma_s(E' \rightarrow E, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega})\varphi(\vec{r}, E', \hat{\Omega}', t) + s(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t)$$

- Warunek początkowy $\varphi(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, 0) = \varphi_0(\vec{r}, E, \hat{\Omega})$

- Równanie jest

- Liniowe w zmiennej zależnej (φ)
- Ma 7 zmiennych niezależnych ($x, y, z, E, \theta, \psi, t$)
- Różniczkowo-całkowe (pochodne po t, x, y, z , całki po θ, ψ, E)

Równanie transportu w jednym wymiarze

Rozważmy postać równania dla przypadku gdy strumień zależy od jednego wymiaru (x)

- Wyrażenie

$$\hat{\Omega} \cdot \nabla \varphi(x) = \Omega_x \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

- Wygodnie jest wybrać układ współrzędnych r, θ wzdłuż osi x . Wtedy $\Omega_x = \cos \theta, \Omega_y = \sin \theta$.
- Równanie ma postać

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \cos \theta \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \Sigma_{tot} \varphi(x, E, \theta, t) = \\ \int_0^{2\pi} d\theta' \sin \theta' \int_0^{\infty} \Sigma_s(E' \rightarrow E, \theta' \rightarrow \theta) \varphi(x, E', \theta', t) + s(x, E, \theta, t) \end{aligned}$$

- Zwyczajowo wprowadza się zmienną $\mu = \cos \theta$

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \Sigma_{tot} \varphi(x, E, \mu, t) = \\ \int_{-1}^1 d\mu' \int_0^{\infty} \Sigma_s(E' \rightarrow E, \mu' \rightarrow \mu) \varphi(x, E', \mu', t) + s(x, E, \mu, t) \end{aligned}$$

Wkład od rozszczepienia

- Wyraz $S()$ zawiera wkład od rozszczepienia, który można bardziej szczegółowo rozisać
- Każde rozszczepienie daje $\nu(E')$ neutronów, a całkowita ich liczba to

$$\int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \nu(E') \Sigma_f(E') \varphi(\vec{r}, E', \hat{\Omega}', t)$$

- Widmo rozszczepienia to $\chi(E)$, jeżeli emisja neutronów jest izotropowa to

$$S_f(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t) = \frac{\chi(E)}{4\pi} \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \nu(E') \Sigma_f(E') \varphi(\vec{r}, E', \hat{\Omega}', t)$$

- Ale w ten sposób mamy tylko neutrony natychmiastowe, musimy dodać neutrony opóźnione, np. poprzez fikcyjne 6 grup izotopów

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = -\lambda_i C_i(\vec{r}, t) + \beta_i \frac{\chi_i(E)}{4\pi} \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \nu(E') \Sigma_f(E') \varphi(\vec{r}, E', \hat{\Omega}', t)$$

- I do równania transportu dodać wyrazy

$$(1 - \beta_i) \nu \Sigma_f \varphi + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(\vec{r}, t)$$

Rozwiązanie numeryczne

- Zagadnienie, które mamy do rozwiązania zawiera zarówno pochodne, jak i całki. Możemy je zapisać, jako szukanie miejsc zerowych pewnej funkcji F

$$F\left(f(x), f', \int dx' f(x'), \mu, t\right) = 0$$

- Rozwiązując to numerycznie wprowadzimy dyskretyzację zmiennej x , zastępując ją przez N węzłowych punktów x_i oraz wartości szukanej funkcji f_i (strumienia)
- Wszelkie pochodne i całki zastępujemy wzorami różnic skończonych lub kwadraturami

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} = \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

$$\int_a^b dx f(x) = \sum_{i=1}^N w_i f_i$$

gdzie w_i to wagi kwadratury (np. Newtona-Cotesa, Gaussa-Legendre'a itp.)

- W przypadku zależności kątowych zamiast rozważania punktów węzłowych lepiej jest rozwinąć funkcję w szereg wielomianowy Legendre'a

$$f(x) = \sum_{l=1}^N f_l P_l(x)$$

$$\varphi(x, \mu, E, t) = \sum_{l=1}^N \varphi_l(x, E, t) P_l(\mu)$$

Rozwiązanie numeryczne

- Równanie transportu zamienia się na układ N-równań

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} + \hat{\Omega}_n \nabla \varphi_n + \Sigma_t \varphi_n = \sum_{n'=1}^N w_{n'} \int_0^\infty dE' \Sigma_s(E' \rightarrow E, \hat{\Omega}_n' \rightarrow \hat{\Omega}) \varphi_n(r, E', t) + S_n(r, E, t)$$

który nosi zwyczajową nazwę układu S_N

- Użycie rozwinięcia kąтового poprzez harmoniki sferyczne $Y_{lm}(\hat{\Omega})$, które jest możliwe także dla większej liczby wymiarów, w przypadku 1D prowadzi do wielomianów Legendre'a w postaci

$$\varphi(x, E, \mu, t) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^N \frac{2l+1}{2} \varphi_l(x, E, t) P_l(\mu)$$

- Taka wersja równania transportu, korzystająca z własności pochodnych wielomianów P

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \varphi_l}{\partial t} + \frac{l+1}{2l+1} \frac{\partial \varphi_{l+1}}{\partial x} + \frac{l}{l+1} \frac{\partial \varphi_{l-1}}{\partial x} + \Sigma_t \varphi_l = \int_0^\infty dE' \Sigma_s(E' \rightarrow E, \hat{\Omega}_n' \rightarrow \hat{\Omega}) \varphi_l(r, E', t) + S_l(r, E, t)$$

nosi zwyczajową nazwę układu P_N .

Rozwiązanie numeryczne

- W rozwiązaniach numerycznych inne zmienne, oprócz przestrzennych, także muszą ulegać dyskretyzacji.
- W przypadku energii wprowadzamy znane już grupy energii, gdzie grupa g oznacza neutrony o energiach od E_{g-1} do E_g (mniejszy numer grupy zwyczajowo oznacza większą energię)
- W przypadku czasu, rozwiązania liczymy dla pewnych ustalonych odcinków czasowych Δt_i (w ogólności nie muszą być równe)
- Dla każdego punktu czasowego musimy rozwiązać algebraiczny układ równań, podobny do tych, które widzieliśmy w przypadku rozwiązywania równania dyfuzji jedno lub wielogrupowej.
- Rozmiar macierzy opisujący problem zależy oczywiście od naszego podziału. Jeżeli wyobrazimy sobie skromną siatkę $100 \times 100 \times 100$ punktów, kąty rozwiniemy w 10 rzędzie, energię podzielimy na 100 grup to otrzymamy macierz o rozmiarze $N \times N$, gdzie $N = 100 \times 100 \times 100 \times 10 \times 10 \times 100 = 10^{10}$. I musimy ją odwracać dla każdego punktu w czasie!
- Tego typu rozwiązania mogą być problematyczne nawet dla dużych komputerów, dlatego wygodniej jest wprowadzić pewne uproszczenia:
 - Często szukamy stanów stacjonarnych - brak zależności od czasu (ale wymaga użycia iteracyjnych metod samobieżnych)
 - Niektóre problemy mają symetrię, która pozwala zredukować liczbę wymiarów przestrzennych lub kątów
 - Możemy uprościć problem przez usunięcie zależności od kątów $\hat{\Omega}$ przez wprowadzenie pewnych przybliżeń

Równanie ciągłości

- W wielu zastosowaniach szczegóły zależności kątowej strumienia nie są potrzebne, dlatego wyznaczmy całkowity strumień wycalkowany po kątach

$$\phi(\vec{r}, E, t) = \int_{4\pi} d\hat{\Omega} \varphi(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t)$$

- Równanie na tę wielkość otrzymamy przez wycalkowanie równania transportu po kątach

$$\int_{4\pi} d\hat{\Omega} \frac{1}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (1)$$

$$+ \int_{4\pi} d\hat{\Omega} \hat{\Omega} \nabla \varphi(r, E, \hat{\Omega}, t) \quad (2)$$

$$+ \int_{4\pi} d\hat{\Omega} \Sigma_{tot} \varphi(r, E, \hat{\Omega}, t) = \quad (3)$$

$$\int_{4\pi} d\hat{\Omega} \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty \Sigma_s(E' \rightarrow E, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}) \varphi(\vec{r}, E', \hat{\Omega}', t) \quad (4)$$

$$+ \int_{4\pi} d\hat{\Omega} S(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t) \quad (5)$$

Równanie ciągłości

- Niektóre wyrazy można bardzo prosto odcałkować, ze względu na możliwość zamiany operacji
 - Wyraz (1)

$$\int_{4\pi} d\hat{\Omega} \frac{1}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \int_{4\pi} d\hat{\Omega} \varphi = \frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

- Podobnie dla (3) i (5) analogicznie dostajemy $\Sigma_t \phi$ oraz $S(\vec{r}, E, t)$
- Całkowanie w wyrazie (4) wygląda na skomplikowane, ze względu na zależność od obu kątów w przekroju czynnym, ale zauważmy, że tak naprawdę zależy on nie tyle od kąta początkowego i końcowego co od jego zmiany, czyli kąta rozpraszania $\mu_0 = \hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}$. Wtedy możemy po prostu go odcałkować

$$\int_{4\pi} d\hat{\Omega} \Sigma_s(E' \rightarrow E, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}) = 2\pi \int_{-1}^{+1} d\mu_0 \Sigma_s(E' \rightarrow E, \mu_0) = \Sigma_s(E' \rightarrow E),$$

i dostać całkowity przekrój na rozpraszanie z energii E' do E .

- Teraz całkowanie wyrazu (4) nie jest takie trudne, kiedy przestawimy całkę $d\hat{\Omega}$ do wyrazu z Σ_s , a całkę po $d\hat{\Omega}'$ do φ

$$\int_0^\infty dE' \left[\int_{4\pi} d\Omega \Sigma_s(E' \rightarrow E, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}) \right] \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \varphi(\vec{r}, E', \hat{\Omega}', t) = \int_0^\infty dE' \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi(\vec{r}, E', t)$$

Równanie ciągłości

- Pozostaje wyraz (2) i tu niestety okazuje się, że musimy wprowadzić całkowy (wycalkowany po kątach) prąd neutronów \vec{J}

$$\int_{4\pi} d\hat{\Omega} \hat{\Omega} \cdot \nabla \varphi = \nabla \cdot \int_{4\pi} d\hat{\Omega} \hat{\Omega} \varphi = \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}, E, t)$$

- Łącząc obliczenia otrzymujemy równanie ciągłości neutronów

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}(r, E, t) + \Sigma_{tot} \phi(r, E, t) = \int_0^\infty dE' \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi(\vec{r}, E', t) + S(\vec{r}, E, t)$$

które zawiera dwie nieznanne wielkości ϕ oraz \vec{J} .

- Moglibyśmy spróbować wyprowadzić równanie na \vec{J} , wychodząc od równania transportu, mnożąc je stronami przez $\hat{\Omega}$ i całkując. We wszystkich wyrazach, gdzie nie występuje $\hat{\Omega}$ można to łatwo zrobić, ale niestety w wyrazie (2) (gdzie już mamy $\hat{\Omega}$) pojawi się czynnik

$$\nabla \int_{4\pi} d\hat{\Omega} \hat{\Omega} \hat{\Omega} \varphi(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t),$$

gdzie dostajemy nową nieznaną wielkość - tensor

- Próba rozwiązania w ten sposób równania nie prowadzi do sukcesu. Jediną metodą analitycznego rozwiązania jest wprowadzenie pewnych uproszczeń.

Przybliżenie jednej prędkości

- Przybliżenie jednej prędkości (energii) oznacza, że rozproszenie nie zmienia energii neutronu. Formalnie do równania transportu można je wprowadzić zakładając następującą postać przekroju czynnego na rozpraszanie, z wykorzystaniem funkcji delta Diraca

$$\Sigma_s(E' \rightarrow E), \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}) = \Sigma_s(E, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega})\delta(E' - E)$$

- Wtedy otrzymamy równanie postaci (równanie transportu w przybliżeniu jednej prędkości)

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \hat{\Omega} \nabla \varphi + \Sigma_{tot}(\vec{r})\varphi(r, \hat{\Omega}, t) = \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \Sigma_s(\hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega})\varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}', t) + s(\vec{r}, \hat{\Omega}, t)$$

oraz odpowiadające mu równanie ciągłości

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}(r, t) + \Sigma_{tot}\phi(r, t) = \Sigma_s\phi(\vec{r}, t) + S(\vec{r}, t)$$

oraz równanie na prąd \vec{J}

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \nabla \cdot \int_{4\pi} d\hat{\Omega} \hat{\Omega} \hat{\Omega} \varphi(r, \hat{\Omega}, t) + \Sigma_{tot}\vec{J} = \bar{\mu}_0 \Sigma_s \vec{J} + \vec{S}_1(\vec{r}, t)$$

gdzie całkowanie po kątach w wyrazie odpowiedzialnym za rozproszenia wprowadzi nam średni kąt w rozproszeniu $\bar{\mu}_0$

$$2\pi \int_{-1}^{+1} d\mu_0 \mu_0 \Sigma_s(\hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}) = \mu_0 \Sigma_s$$

$$\bar{\mu}_0 \equiv \langle \hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega} \rangle$$

który w przybliżeniu rozpraszania elastycznego na nieruchomym jądrze - co już liczyliśmy - będzie równy $2/3A$

Przybliżenie strumienia kąowego

- Najważniejszym przybliżeniem, które pozwoli usunąć nam problematyczny wyraz z równania transportu, jest założenie, że kąowy strumień słabo zmienia się z kątem.
- Rozwińmy teraz strumień względem kąta, ale zatrzymując tylko wyrazy co najwyżej liniowe

$$\varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, t) \approx \varphi_0(r, t) + \varphi_{1x}(r, t)\Omega_x + \varphi_{1y}(r, t)\Omega_y + \varphi_{1z}(r, t)\Omega_z$$

- To rozwinięcie, zamiast nieznanych funkcji φ_0 oraz φ_{1i} , może być zapisane jako

$$\varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, t) \approx \frac{1}{4\pi} \phi(r, t) + \frac{3}{4\pi} J(r, t) \cdot \hat{\Omega}$$

odcałkowując te rozwinięcie można sprawdzić, że ϕ i J są zgodne z definicjami

- Rozwinięcie wstawiamy do równania na prąd, aby pozbyć się wyrazu z tensorem

$$\nabla \cdot \int_{4\pi} d\hat{\Omega} \hat{\Omega} \hat{\Omega} \varphi(r, \hat{\Omega}, t) = \nabla \cdot \int_{4\pi} d\hat{\Omega} \hat{\Omega} \hat{\Omega} \left(\frac{1}{4\pi} \phi(r, t) + \frac{3}{4\pi} J(r, t) \cdot \hat{\Omega} \right)$$

- Okazuje się, że całka z dwoma $\hat{\Omega}$ da czynnik $4\pi/3$, natomiast z trzema $\hat{\Omega}$ się wyzeruje i dostaniemy

$$\nabla \cdot \int_{4\pi} d\hat{\Omega} \hat{\Omega} \hat{\Omega} \varphi(r, \hat{\Omega}, t) = \frac{1}{3} \nabla \phi(\vec{r}, t)$$

Przybliżenie strumienia kąтового

- Otrzymamy układ równań na ϕ i \vec{J}

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}(r, t) + \Sigma_{tot} \phi(r, t) = \Sigma_s \phi(\vec{r}, t) + S(\vec{r}, t)$$
$$\frac{1}{v} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \frac{1}{3} \nabla \phi(r, t) + \Sigma_{tot} \vec{J} = \bar{\mu}_0 \Sigma_s \vec{J} + \vec{S}_1(\vec{r}, t)$$

- Te równania są znane także jako równania P_1 , ponieważ są równoważne rozwinięciu zależności kątowej w jednym wymiarze w wielomiany Legendre'a pierwszego rzędu.
- Kolejne dwa przybliżenia doprowadzą ten model do modelu dyfuzji:
 - Źródło ($s(r, \hat{\Omega}, t)$) jest izotropowe - co oznacza, że pierwszy moment \vec{S}_1 zniknie
 - Pochodna prądu po czasie jest dużo mniejsza niż pozostałe wyrazy w równaniu prądu
- Dostaniemy wtedy równanie na prąd

$$\frac{1}{3} \nabla \phi(r, t) + (\Sigma_{tot} - \bar{\mu}_0 \Sigma_s) \vec{J} = 0$$

Równanie dyfuzji

- Możemy zatem wyrazić prąd przez strumień

$$\vec{J} = \frac{1}{3 (\Sigma_{tot} - \bar{\mu}_0 \Sigma_s)} \nabla \phi(r, t)$$

- I wstawić te wyrażenie do równania na strumień

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \nabla \cdot D(r) \nabla \phi + \Sigma_a(r) \phi(r, t) = S(r, t)$$

gdzie

$$D(r) = \frac{1}{3 (\Sigma_{tot}(r) - \bar{\mu}_0 \Sigma_s(r))}$$

- Co oczywiście jest dobrze już znanym równaniem dyfuzji neutronów oraz współczynnikiem dyfuzji - tym razem wyznaczonym nieco dokładniej.