

Analiza I, pytania egzaminacyjne, 24.01.2019

Instrukcja obsługi:

- Bardzo proszę o wszelkie uwagi związane z ew. błędami, literówkami czy też niejasną postacią pytań.
- Na egzaminie ustnym losujemy po jednym pytaniu z każdej z trzech grup. Pełna odpowiedź na wszystkie pytania kończy się oceną bardzo dobrą, brak odpowiedzi na dane pytanie obniża ocenę o stopień. Odpowiedź pełna to taka, w której pojawiają się dowody twierdzeń związanych z danym pytaniem. Odpowiedź nie zawierająca dowodu traktowana jest jako połowa poprawnej - stąd na ocenę wyższą niż dostateczna plus należy znać dowody przedstawianych twierdzeń.
- Zrozumienie jest ważniejsze niż mechaniczne odtworzenie napisu, który pojawił się na wykładzie - umiejętność przedstawienia choćby idei (zarysu) dowodu pozwala na podniesienie oceny.
- W przypadku trudności związanych ze znalezieniem przykładów (lub dowodów), podajemy te, które pojawiły się na wykładzie. Jeżeli dowodu nie było, nie musimy go podawać.
- Punktem wyjścia do oceny końcowej jest średnia ocen z egzaminu pisemnego i ustnego. Egzaminator rezerwuje sobie prawo do podniesienia tejże o $\pm \epsilon$.

Grupa I

1. Rachunek zdań, koniunkcja, alternatywa, implikacja, negacja, tautologie. Zasada dowodu nie wprost (niewymierność $\sqrt{2}$). Podstawowe operacje na zbiorach: suma, przecięcie, różnica. Para uporządkowana i iloczyn kartezjański. Zasada indukcji matematycznej. Przykłady dowodów indukcyjnych.
2. Relacje i odwzorowania, injekcja, surjekcja, bijekcja, odwzorowanie odwrotne. Zbiory równoliczne, zbiory przeliczalne i nieprzeliczone, przykłady.
3. Zbiory liczbowe: liczby naturalne (konstrukcja), całkowite (konstrukcja), wymierne (konstrukcja), rzeczywiste (konstrukcja).
4. Metryka. Definicja, przykłady. Równoważność metryk. Kule w przestrzeni metrycznej. Zbiory ograniczone, otwarte, domknięte.
5. Ciągi rzeczywiste, granica ciągu, podstawowe własności (ilość granic dla ciągu zbieżnego, granica sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu, ograniczoność ciągu zbieżnego).
6. Ciągi monotoniczne. Rekurencja. Twierdzenie o trzech ciągach. Przykłady.
- 7, 8. Pojęcie podciągu, ciągi ograniczone. Tw. Bolzano-Weierstrassa. Ciąg Cauchy. Własności. Zbieżność. Przykłady.
9. Punkt skupienia, punkt wewnętrzny. Zbiór otwarty, domknięty. Przykłady. Spójność. Twierdzenie (własność) Darboux.
10. Granica funkcji. Ciągłość funkcji, definicja ciągowa i Cauchy. Własności funkcji ciągłych (suma, różnica, iloczyn, superpozycja). Własności funkcji ciągłej na zbiorze domkniętym. Pytanie dotyczące funkcji na $\mathbb{R}^1$.
- 11, 12. Ciągłość jednostajna. Przykłady. Własności funkcji ciągłej na zbiorze domkniętym.

Grupa II

1. Pochodna funkcji w punkcie. Interpretacja geometryczna. Ciągłość a różniczkowalność. Przykłady. Pochodna sumy, iloczynu i ilorazu.

2. Pochodna superpozycji i funkcji odwrotnej.
3. Tw. Rolle'a. Tw. Lagrange'a. Interpretacja geometryczna.
4. Tw. Lagrange'a i Cauchy'ego, zastosowania.
5. Reguły de l'Hospitala. Przykłady.
6. Wzór Taylora. Zastosowania.
7. Funkcje wypukłe, przykłady, kryteria wypukłości. Minimum, maksimum lokalne. Warunki konieczne i dostateczne.
8. Zbieżność szeregu, warunek konieczny i dostateczny. Szeregi o wyrazach dodatnich, pojęcie zbieżności bezwzględnej, kryteria d'Alemberta i Cauchy'ego.
9. Zbieżność szeregu, warunek konieczny i dostateczny. Szeregi naprzemienne. Kryterium Leibniza. Zbieżność bezwzględna a przestawianie wyrazów szeregu.
10. Kryterium porównawcze zbieżności szeregów. Kryterium zagęszczeniowe. Mnożenie szeregów a zbieżność. Przykłady.
11. Twierdzenie Riemanna (o przestawianiu wyrazów szeregu). Przykłady.
12. Szeregi potęgowe, granica górna i dolna. Promień zbieżności.

GRUPA III

- 1, 2. Całka Riemanna. Konstrukcja (sumy górne i dolne, istnienie, interpretacja geometryczna itp).
3. Ciągłość a całkowalność. Całka sumy i różnicy funkcji. Podstawowe twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego.
4. Funkcje monotoniczne a całkowalność. Całki funkcji nieciągłych – przykłady. Twierdzenie o wartości średniej dla całki Riemanna. Pochodna funkcji złożonej górnej granicy całkowania.
5. Całkowanie przez części i zamiana zmiennych w całce Riemanna. Przykłady.
6. Ciągi i szeregi funkcyjne. Przykłady. Zbieżność punktowa i jednostajna. Twierdzenie o ciągłości ciągu funkcyjnego. Tw. Weierstrassa. Całkowanie ciągów i szeregów funkcyjnych.