

Analiza I
Zadania, tydzień 1 i 2

- 1.1 Niech A i B będą podzbiorami U . Niech $C = A \cap B$, $D = A' \cup B$ i $E = A \cup B$. Zaznacz na diagramach Venna zbiory C, D i E . Korzystając z praw de Morgana pokaż, że $A = D' \cup C$. Udowodnij, że $B = D \cap E$.
- 1.2 Zilustrować przy pomocy diagramu Venna zdania:
 $(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- 1.3 Niech p oznacza zdanie „idę do szkoły” zaś q odpowiada zdaniu „słońce świeci”. Napisz korzystając z symboli logicznych: a) Jeżeli słońce świeci to idę do szkoły, b) Jeżeli nie idę do szkoły to słońce nie świeci. Podaj (słowami) zdanie przeciwne do „Jeżeli słońce świeci to idę do szkoły”. Sporządź tabelkę logiczną dla zdań: $p \wedge q$, $p \vee q$, $\neg p$, $(p \vee q) \wedge \neg p$, $(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$. Jak określimy zdanie: $(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$?
- 1.4 Zdefiniować koniunkcję za pomocą alternatywy i negacji.
- 1.5 Zdefiniować alternatywę za pomocą koniunkcji i negacji.
- 1.6 Niech U będzie zbiorem punktów (x, y) , dla których $x^2 + y^2 < 1$, B będzie zbiorem punktów, dla których $x^2 + y^2 < 4$, C będzie zbiorem punktów, dla których $(x - 1)^2 + y^2 < 1$, Znaleźć zbiory $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cup B \cup C$, $A \cap C$, $A \setminus B$, $A \cap B \cap C$.
- 1.7 Niech $A := \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}_+ \right\}$. Wyznaczyć kresy zbioru A .
- 1.8 Niech $B := \left\{ \frac{m}{n} + \frac{4n}{m}, m, n \in \mathbb{N}_+ \right\}$. Wyznaczyć kresy zbioru B .

Wykorzystujące zagadnienia z wykładu 2:

- 1.9 Dowód niewymierności $\sqrt{3}$
- 1.10 Indukcyjnie dowieść nierówność Bernoulliego: $\forall x \geq -1, \forall n \in \mathbb{N} : (1 + x)^n \geq 1 + nx$.
- 1.11 Udowodnić indukcyjnie, że: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- 1.12 Ciąg (a_n) spełnia warunki: $a_1 = 4, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$. Sprawdzić indukcyjnie, czy ciąg jest rosnący.
Wskazówka: Zadanie ilustruje jak ważny jest warunek $T(1)$.
- 1.13 Udowodnić indukcyjnie, że wielomian $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$, $n \in \mathbb{N}$ jest podzielny przez trójmian $x^2 - 2x + 1$.