

Analiza I
Zadania, tydzień 10

10.1 Policz $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$.

10.2 Policz $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$, $|q| < 1$.

10.3 Zbadać (2 przykłady) zbieżność następujących szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2n^3-1}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3^n}{3^n}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$

10.4 Zbadać (2 przykłady) zbieżność następujących szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)5^n}{2^n 3^{n+1}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\arctg n)^n}{2^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

10.5 Korzystając z kryterium porównawczego, zbadać (2 przykłady) zbieżność szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n^n)^p}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$

10.6 Rozważmy ciąg trójkątów prostokątnych równoramiennych, takich, że przyprostokątna poprzedniego jest przeciwprostokątną następnego trójkąta. Przeciwprostokątna pierwszego wynosi 1. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, gdzie a_n jest długością przyprostokątnej n -tego trójkąta.

10.7 Zbadać zbieżność (2 przykłady) następujących szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+1}{4n+1}\right)^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{2} - 1)$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n \ln n}{n}$

10.8 Zbadać zbieżność (2 przykłady) szeregów w zależności od parametru s :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^s n}$

c) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln n (\ln \ln n)^s}$

10.9 Zbadać zbieżność szeregu: $\sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - n \sin \frac{1}{n}\right]^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

10.10 Zbadać zbieżność szeregu: $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + a^2})$, $a > 0$.

10.11 Zbadać zbieżność szeregu: $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}\right]$, $a, b > 0$.