

Analiza I
Zadania, tydzień 2

- 2.1 $\bigcup_{t \in [2,3]A_t}$ oraz $\bigcap_{t \in [2,3]A_t}$, gdzie: $A_t = [t, 2t] \times [-t, t]$.
- 2.2 Pokazać, że funkcja $f : X \rightarrow Y$, gdzie $X =]0, 1[$, $Y = [-2, 2] \setminus \{-1, 1\}$ $f(x) = \begin{cases} -3x - 1, & x \in]0, \frac{1}{3}], \\ 3x, & x \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ 6x - 5, & x \in]\frac{2}{3}, 1[\end{cases}$ jest bijekcją. Znaleźć $f^{-1}(x)$.
- 2.3 Udowodnić, że zbiór $\{x \in \mathbb{N} : 10|x\}$ jest przeliczalny.
- 2.4 Korzystając z funkcji $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in \mathbb{N}, \\ -2x - 1, & x \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \end{cases}$ pokazać przeliczalność zbioru $\mathbb{Z}$.
- 2.5 Dowieść, że każdy zbiór rozłącznych, położonych na prostej odcinków jest przeliczalny.
- 2.6 Omówić dowód przekątniowy Cantora nieprzeliczalności odcinka $]0, 1[$.
- 2.7 Pokazać, że zbiór wartości funkcji $f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ jest nieograniczony.
- 2.8 Pokazać, że funkcja $f(x) = x \sin x$, $x \in]0, +\infty[$ nie jest ograniczona z góry ani z dołu.
- 2.9 Wykaż, że liczba 2 nie jest kresem górnym zbioru liczb postaci $\frac{3n+1}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.
- 2.10 Pokaż, że kres dolny zbioru liczb postaci $\frac{-x^2}{1+x^4}$, $x \in \mathbb{R}$ wynosi $-\frac{1}{2}$.
- 2.11 Podaj przykład zbioru A , dla którego: a) $\sup A \in A$, $\sup A \notin A$,
 $\inf A \in A$, $\inf A \notin A$, $\sup A = \inf A$.
- 2.12 Wyliczyć:
a) $\bigcap_n A_n$, b) $\liminf A_n := \bigcup_n \bigcap_{k \geq n} A_k$, c) $\limsup A_n := \bigcap_n \bigcup_{k \geq n} A_k$, d) $\bigcup_n A_n$, jeśli: $A_n = \left[\frac{n(-1)^n}{n+1}, \frac{2n}{n+1} \right]$ dla $n \in \mathbb{N}_+$.
- 2.13 Zbadać, czy ciąg $a_n = \frac{1}{n}$ jest monotoniczny i ograniczony. (Przypominam, że nie mamy jeszcze ciągłości funkcji!).
- 2.14 Wykaż, że ciąg $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ jest ograniczony z góry przez 1.
- 2.15 Wykaż, że ciąg $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}$ jest malejący i ograniczony.
- 2.16 Bezpośrednio z definicji pokazać, że $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$
- 2.17 Bezpośrednio z definicji pokazać, że $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 0$
- 2.18 Bezpośrednio z definicji pokazać, że $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$
- 2.19 Bezpośrednio z definicji pokazać, że $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + 3 = +\infty$