

Analiza I
Zadania, tydzień 3

3.1 Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym (tutaj nie liczymy z definicji lecz korzystamy z twierdzeń o iloczynnie, ilorazie itp ciągów, których granice już znamy):

(a) $u_n = \frac{n^2-1}{3-n^2}$

(b) $u_n = \frac{2n+(-1)^n}{2n-1}$

(c) $u_n = \frac{\sqrt{1+2n^2}-\sqrt{1+4n^2}}{n}$

(d) $u_n = \frac{\sqrt{n^2+4}}{3n-2}$

(e) $u_n = \frac{n}{\sqrt[3]{8n^3-n^2-n}}$

3.2 Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

(a) $u_n = 3n - \sqrt{9n^2 + 6n - 15}$

(b) $u_n = \sqrt[3]{n^3 + 4n^2} - n$

3.3 Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

$$u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{2^{n+1}-1}{3^{n+1}-1}.$$

3.4 Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym (typowe na twierdzenie o trzech ciągach):

(a) $u_n = \sqrt[n]{10^{100}} - \sqrt[n]{\frac{1}{10^{100}}}$

(b) $u_n = \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n}$

3.5 Oblicz granicę ciągu określonego rekurencyjnie: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$.

3.6 Zbadać zbieżność ciągu określonego rekurencyjnie: $x_0 > 0$, $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$.

3.7 Bezpośrednio z warunku Cauchy'ego wykazać, że ciąg $\{\frac{1}{n}\}$ jest zbieżny.

3.8 Bezpośrednio z warunku Cauchy'ego wykazać, że ciąg $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ jest zbieżny.

3.9 Znaleźć granicę ciągu danego wzorem rekurencyjnym: $a_{n+1} = \frac{1}{a_n^2}$, $a_1 > 0$, $a_1 \neq 1$.

3.10 Zbadać zbieżność ciągu: $\frac{n}{2n+1} \sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right)$.

3.11 Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

(a) $u_n = \left(1 - \frac{4}{n}\right)^{-n+3}$

(b) $u_n = \left(\frac{n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$

3.12 Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

(a) $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}$

(b) $u_n = \frac{n \sin n!}{n^2+1}$

(c) $u_n = n(\ln(n+1) - \ln n)$

(d) $u_n = \frac{2^n 3^n}{n!}$