

Analiza I
Zadania¹, tydzień 4

- 4.1 Zbadać zbieżność ciągu i znaleźć granicę: $a_n = \frac{1^{\frac{1}{4}} + 3^{\frac{1}{4}} + \dots + (2n+1)^{\frac{1}{4}}}{n^{\frac{5}{4}}}$
- 4.2 Sprawdzić, korzystając z Tw. Stolza, że: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^5 + 2^5 + \dots + n^5}{n^6} = \frac{1}{6}$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) = 2(\sqrt{2} - 1)$.
- 4.3 Wykazać, że jeżeli ciąg liczbowy (a_n) jest zbieżny, to:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_1 + (n-1)a_2 + \dots + a_n}{n + (n-1) + \dots + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- 4.4 * Narysować dla metryk L^1 oraz L^∞ z $\mathbb{R}^2$ d-odcinki,
czyli zbiory $[a, b] := \{x \in \mathbb{R}^2; d(a, x) + d(x, b) = d(a, b)\}$ (kółka będą na wykładzie)
- 4.5 Narysować kule i d-odcinki w metryce „rzymskiej” w $\mathbb{R}^2$ czyli $d(x, y) = \begin{cases} |x| + |y|, & x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0 \\ |x - y|, & x_1y_2 - x_2y_1 = 0 \end{cases}$,
gdzie $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$
- 4.6 (a) Niech $X := K(0, 1)$ (czyli $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$) zaś:
 $d(x, y) := \min(|x - y|, 2 - |x| - |y|)$. Sprawdzić, że $d(x, y)$ jest metryką
(b) Pokazać, że (X, d) jest przestrzenią metryczną niezupełną.
- 4.7 Zbadać, czy zbiory: $A := \bigcup_{n=1}^{+\infty} [\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}]$, $B = \bigcap_{n=1}^{+\infty}]-\frac{1}{n}, \frac{n}{n-1}[$, są otwarte bądź domknięte.
- 4.8 * Zbadać, czy zbiory: $A := \bigcup_{n=1}^{+\infty} [-\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$, $B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} [-2 + \frac{2}{n+2}, 1 + \frac{2}{n+1}[$, są otwarte bądź domknięte.
- 4.9 Załóżmy, że w przestrzeni $X = [1, +\infty[$ wprowadzono metrykę daną wzorem:
 $d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1 + \frac{1}{xy}, & x \neq y \end{cases}$ Zbadać, czy zbiór $A = [2, 3[$ jest otwarty bądź domknięty.

¹* są oznaczone zadania dodatkowe, które można w ramach wolnego czasu zrobić na ćwiczeniach, konsultacjach lub przeznaczyć jako domowe.