

Analiza I
Zadania¹, tydzień 5

- 5.1 Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$. Pokazać, że zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $]1, 2]$.
- 5.2 Zapisać w języku Heinego i Cauchy'ego zdanie: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$.
- 5.3 Wykazać z definicji (Heine i Cauchy), że $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- 5.4 Niech $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x \text{ niewymiernych} \\ x^2, & \text{dla } x \text{ wymiernych} \end{cases}$.
Wykazać z def. Cauchy'ego, że $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.
- 5.5 Wykaż, że nie istnieje granica $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$.
- 5.6 Wykaż opierając się na def. Cauchy'ego, że $f(x) = \frac{1}{x}$ jest ciągła w punkcie $x = 2$.
- 5.7 Zbadać ciągłość funkcji f określonej wzorem: $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x}, & \text{dla } x \neq 0, \\ 1, & \text{dla } x = 0. \end{cases}$.
- 5.8 * Zbadać ciągłość funkcji f określonej wzorem: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \frac{\sin x}{x}, & \text{dla } x \neq 0, \\ 0, & \text{dla } x = 0. \end{cases}$.
- 5.9 Opierając się na definicji ciągłości jednostajnej pokazać, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest ciągła jednostajnie na przedziale $[1, +\infty[$.
- 5.10 Opierając się na definicji ciągłości jednostajnej pokazać, że funkcja $f(x) = x^2$ jest ciągła jednostajnie na przedziale $]0, 2[$.
- 5.11 Opierając się na definicji ciągłości jednostajnej pokazać, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ nie jest ciągła jednostajnie na przedziale $]0, +\infty[$.
- 5.12 * Opierając się na definicji ciągłości jednostajnej pokazać, że funkcja $f(x) = x^2$ nie jest ciągła jednostajnie na przedziale $]0, +\infty[$.

¹* są oznaczone zadania dodatkowe, które można w ramach wolnego czasu zrobić na ćwiczeniach, konsultacjach lub przeznaczyć jako domowe.