

Analiza I

Zadania¹, tydzień 6

6.1 Zbadać różniczkowalność funkcji: $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ x^n, & x \leq 0 \end{cases}$

6.2 Zbadać, czy istnieje pochodna funkcji $f(x) = \operatorname{sgn} x$ w punkcie $x = 0$.

6.3 * Dane są funkcje: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x > 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.
Oblicz $f'(0^+)$.

6.4 Dana jest funkcja $f(x) = \sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Zbadaj dla jakich $x \in \mathbb{R}$ istnieje pochodna $f(x)$.

6.5 Dla jakiego a funkcja $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x}, & \text{dla } x > -1 \text{ i } x \neq 0, \\ a, & \text{dla } x = 0 \end{cases}$ jest różniczkowalna w punkcie $x = 0$?

6.6 Obliczyć pochodne wybranych funkcji z listy poniżej. Pozostałe zostają zadane jako praca domowa:

- | | | |
|---|--|---|
| a) $y(x) = a^3x^3 + b^2x + c$ | f) $x(t) = t^3\sqrt{t}$ | l) $y(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{(ax+bx)^p}}$ |
| b) $y(b) = ax^3 + b^2x + c$ | g) $y(x) = \frac{3}{3x-2}$ | m) $v(z) = \frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}$ |
| c) $y(x) = 3x^{\frac{7}{3}} - 4x^{-\frac{13}{4}} + \frac{4}{7}x^{-\frac{1}{2}} + 7^{\frac{3}{2}}$ | h) $z(t) = \frac{3t^2}{7t^5-t-2}$ | n) $y(x) = \sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}$ |
| d) $y(x) = 5\sqrt[3]{x^7}$ | i) $z(t) = \frac{1+\sqrt{t}}{1+2\sqrt{t}}$ | o) $s(t) = \sqrt{\frac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}}$ |
| e) $y(x) = \frac{2}{x^2\sqrt{x}}$ | j) $y(t) = \left(\frac{1}{t} + 4\right)^4$ | p) $u(v) = \frac{\sqrt{1+v}-\sqrt{1-v}}{\sqrt{1+v}+\sqrt{1-v}}$ |
| | k) $s(t) = \frac{1}{\sqrt{6t-t^2}}$ | |

6.7 Obliczyć pochodne wybranych funkcji trygonometrycznych z listy poniżej. Pozostałe zostają zadane jako praca domowa:

- | | | |
|---------------------------------|--|---|
| a) $y(x) = \sin \frac{a}{x}$ | c) $y(x) = \frac{x \sin x}{1+\operatorname{tg} x}$ | e) $y(x) = e^x(a \sin x - \cos x)$ |
| b) $v(t) = \frac{5}{\sin^3 2t}$ | d) $y(t) = \operatorname{tg}^4 \sqrt{t}$ | f) $y(x) = \sqrt{1 + \operatorname{tg} \left(x + \frac{1}{x}\right)}$ |

6.8 Obliczyć pochodne wybranych funkcji cyklometrycznych z listy poniżej. Pozostałe zostają zadane jako praca domowa:

- | | | | |
|-------------------------------------|--|---|---|
| a) $y(x) = \operatorname{arctg} 3x$ | b) $y(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$ | c) $y(t) = \frac{\operatorname{arctg} 2t}{\operatorname{arctg} 2x}$ | d) $z(t) = \frac{\operatorname{arc} \sin 4y}{1-4y}$ |
|-------------------------------------|--|---|---|

6.9 Obliczyć pochodne wybranych funkcji wykładniczych z listy poniżej. Pozostałe zostają zadane jako praca domowa:

- | | | | |
|------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|-------------------------------|
| a) $f(x) = e^{\cos^2 x}$ | e) $z(t) = \ln \frac{30}{x+3}$ | i) $y(x) = x^{\sin x}$ | m) $y(x) = (\sin x)^{\cos x}$ |
| b) $z(t) = 2 \times 7^t - 1$ | f) $y(x) = \ln(\ln x)$ | j) $z(t) = t^{\frac{1}{t}}$ | n) $y(x) = x^{e^x}$ |
| c) $y(x) = a^{2x}x^n$ | g) $z(x) = \log_x \ln x$ | k) $y(x) = a^{\ln x}$ | |
| d) $y(x) = \ln \sin x$ | h) $y(x) = x^{5x}$ | l) $y(x) = x^{\frac{1}{\ln x}}$ | o) $y(x) = x^{x^x}$ |

¹* są oznaczone zadania dodatkowe, które można w ramach wolnego czasu zrobić na ćwiczeniach, konsultacjach lub przeznaczyć jako domowe.

$$\text{I } g(x) = (x - k\sqrt{1-x^2})e^{k \arcsin x}$$

$$\text{III } y(x) = \ln(\ln(\ln x))$$

$$\text{II } f(x) = \ln(\cos \frac{1}{2}x)^2$$

6.10 * Wykazać, że funkcja $x(t) = a \sin(\omega t + \varphi_0)$ spełnia równanie: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$.

6.11 Znaleźć pochodne funkcji $f(x) = \log_x \cos(\frac{\pi x}{2})$, $g(x) = x^{\sin(x^x)}$.

6.12 * Niech $\phi(x) = f(x+vt) + g(x-vt)$, zaś $\psi(t) = f(x+vt) + g(x-vt)$, f, g są dwukrotnie różniczkowalne. Pokazać, że $\dot{\psi} = v^2 \phi''$. Podać interpretację wyrażenia $f(x+vt) + g(x-vt)$.

6.13 Pokazać, że wielomian $w_n(x) = x^n - x^{n-1} + 2x^{n-2} + 3$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, może mieć co najwyżej dwa rzeczywiste miejsca zerowe.

6.14 Która z liczb jest większa: e^π , czy π^e ?

6.15 Znaleźć równanie stycznej do krzywej: $2x^2 - 3xy + y^2 = 4$ w punkcie $(3, 2)$.

6.16 * Udowodnij, że linia $y = mx + c$ jest styczna do elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ jeżeli $c^2 = a^2 m^2 + b^2$.

6.17 Pas do lądowania ma 2 km. Samolot ląduje na pasie. Odległość między hamującym samolotem a początkiem pasa opisuje wzór: $s = c + 100t - 4t^2$, gdzie t mierzymy w sekundach od momentu lądowania a c jest odległością między punktem przyziemienia a początkiem pasa. Niech $c = 800m$. Znajdź odległość, jaką przebył samolot po 5. sekundach. Znajdź wzór na prędkość samolotu. Znajdź punkt P , w którym prędkość samolotu wynosiła 36 m/s. okaż, że jeżeli samolot wyląduje przed punktem P , to zatrzyma się przed końcem pasa startowego.

6.18 * Dla $x \in [0, 2\pi]$ znaleźć przedziały, dla których funkcja $y(x) = x - 2 \sin x$ jest rosnąca.

6.19 Suma obwodów kwadratu o boku a i koła o promieniu r wynosi 240. Ile wynosi r , jeżeli suma pól powierzchni osiąga wtedy minimum?

6.20 Krzywą definiujemy jako zbiór punktów (x, y) , gdzie $x := t^2 + \sin(2t)$ a $y = t + \sin(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Znaleźć równanie stycznej do krzywej w punkcie, dla którego $t = 0$

6.21 Znaleźć wartości a , dla których prosta $9x - y = 14$ jest styczna do krzywej $y(x) = x^3 - 3x + a$ w punkcie $x = a$.

6.22 Narysować wykres funkcji mając wykres pochodnej (np. podobną do paraboli) i informację, że funkcja przechodzi przez jakiś punkt.

6.23 * W półkole o promieniu r wpisano trójkąt równoramienny, którego wierzchołek leży w środku koła. Zbadać przebieg zmienności pola S tego trójkąta.