Analiza I
Zadania, tydzień 8

8.1 Obliczyć granice (wybrane przykłady)

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}$
b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$
c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})^2}{x^2\cos x}$
d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{a^{\ln x}}{x^c}$
e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg} x-1}{\sin x-\cos x}$
f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$
g) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{2x-1}$
h) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln\ln x}{x}$
i) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x})$
j) $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)\ln(1-x)$
k) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\pi-2\operatorname{arctg} x)\ln x$
l) $\lim\limits_{x\to \alpha}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2\alpha}\right)(e^{\sin\alpha-e^{\sin x}})$

8.2 Obliczyć granice (wybrane przykłady):

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$
b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$
c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{\sin x}\right)$
d) $\lim\limits_{x\to +\infty}x^{\frac{1}{x}}$
e) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$
f) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$
g) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

8.3 Obliczyć granicę: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x^3}$

8.4 Obliczyć granice: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x^2+1}}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{a^x-1}{x(a-1)}\right)^{\frac{1}{x}}$, $\quad a>0, a\neq 1.$

8.5 Czy można zastosować regułę de l'Hospitala do obliczenia następujących granic?

a) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x-\sin x}{2x+\sin x}$
b) $\lim_{x\to +\infty}\frac{2x+\sin(2x)+1}{(2x+\sin(2x))(\sin x+3)^2}$
c) $\lim_{x\to 0^+}\left(2\sin\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}\right)^x$

8.6 Udowodnić, że prawdziwa jest nierówność:
$\frac{n^2}{x_1+\cdots+x_n}\leq\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n},\quad x_1,\ldots,x_n>0$