

Analiza I
Zadania, tydzień 9

9.1 Wykaż, że $\forall_{x \neq 0}, \quad e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$

9.2 Rozwiń (3 przykłady) za pomocą wzoru Taylora w otoczeniu $x_0 = 0$ do n -tego stopnia włącznie następujące funkcje:

- | | | | |
|--------------|--------------|--------------------|---------------------------|
| a) e^x | c) $\cos(x)$ | e) $\frac{1}{1+x}$ | g) $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ |
| b) $\sin(x)$ | d) $(1+x)^m$ | f) $\sqrt{1+x}$ | |

(te ostatnie podstawiając odpowiednie m do wzoru ogólnego).

9.3 Rozwiń (2 przykłady) za pomocą wzoru Taylora w otoczeniu $x_0 = 0$ do n -tego stopnia włącznie następujące funkcje:

- | | | | |
|-------------|---------------|-----------------------------|----------------------|
| a) $\ln(x)$ | b) $\ln(1+x)$ | c) $\operatorname{arctg} x$ | d) $e^{\frac{1}{x}}$ |
|-------------|---------------|-----------------------------|----------------------|

9.4 Napisać rozwinięcie funkcji $e^{\sin x}$ do wyrazów z x^3 .

9.5 Oblicz za pomocą wzoru Taylora (przypominam, że chodzi tu o wzór Taylora a nie szereg Taylora):

- | | |
|---|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\ln(1+x)}$ | b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ |
|---|--|

9.6 Korzystając ze wzoru Taylora oblicz granice:

- | | |
|---|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cosh x + x^2}{x^3 \sin^3 x}$ | b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg}(x))^{\operatorname{tg}(2x)}$ |
|---|--|

9.7 Zbadaj liczbę rozwiązań równania $x^x = a^a, x > 0, a > 0$.

9.8 Ćwiczenie na definicję minimum: dane są funkcje:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sin x, & x > 0 \\ |x| - 1, & x \leq 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 + \sin x, & x \geq 0 \\ |x| - 1, & x < 0 \end{cases}$$

Zbadać, czy f i g posiadają ekstremum w punkcie $x = 0$.

9.9 Promień świetlny wybiega z punktu A z prędkością v_1 , pada na prostą p , załamuje się i biegnie z prędkością v_2 do punktu B po drugiej stronie prostej p . Jaki musi być stosunek sinusów kąta padania α i kąta załamania β , by czas potrzebny na przejście z A do B był jak najkrótszy?

9.10 Znaleźć stożek o największej objętości wpisany w kulę o promieniu R .

9.11 Dana jest parabola $y = ax^2$, gdzie $a > 0$. Znaleźć taki punkt na paraboli, że odcinek normalnej wystawionej w tym punkcie, zawarty wewnątrz paraboli jest najkrótszy.

9.12 Zbadać (1 przykład) przebieg zmienności funkcji (nie zapomnieć o równaniach asymptot):

- | | | |
|---------------------------------------|--|-----------------------------------|
| a) $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ | c) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$ | d) $f(x) = \frac{x^2-6x+13}{x-3}$ |
| b) $f(x) = \frac{2x+1}{x-4}$ | e) $f(x) = 4x - \operatorname{tg}(x), x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ | |

9.13 Zbadać (1 przykład) przebieg zmienności funkcji:

$$\text{a) } f(x) = \cos^2 x + 2 \sin^2 x \quad \text{b) } f(x) = \sin x \cos 2x \quad \text{c) } f(x) = \sqrt{\sin x^2}$$

9.14 Zbadać (1 przykład) przebieg zmienności funkcji:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } f(x) = x^2 \ln x & \text{c) } f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} & \text{e) } f(x) = e^{\frac{x}{x-1}} & \text{g) } f(x) = e^{\operatorname{tg}(x)} \\ \text{b) } f(x) = \frac{1}{\ln x} & \text{d) } f(x) = \ln(\sin x) & \text{f) } f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}} & \text{h) } f(x) = \operatorname{arctg}(\ln x) \end{array}$$

9.15 Pokazać, że jeżeli $f(x) : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i ma asymptotę dla $x \rightarrow +\infty$, czyli $\exists A, B \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - Ax - B) = 0$, to f jest jednostajnie ciągła. Pokazać na przykładzie poniższego zadania.

9.16 (Polecam ;) Zbadać przebieg funkcji oraz jednostajną ciągłość jeżeli $f(x) = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$.

9.17 Znaleźć ekstrema funkcji: $f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x}$,
 $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_+$

9.18 Znaleźć ekstremum funkcji $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} \left(\sqrt{2} + \sin \frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$