

I seria zadań domowych z Analizy I

30.10.2018

Zad. 1

Wykaż, że poniższe zdania są tautologiami:

- a) $[(p \Rightarrow q) \wedge q'] \Rightarrow p'$
- b) $(p \vee q) \wedge (q' \vee r) \Rightarrow (p \vee r)$
- c) $[(p \vee q) \Rightarrow (r \wedge r')] \Rightarrow (p' \wedge q')$

Zad. 2

Wykaż poniższe twierdzenia:

- a) $(A \setminus B) \cup (C \setminus B) = (A \cup C) \setminus B$
- b) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$
- c) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$

Zad. 3

Różnicą symetryczną zbiorów A i B nazywamy zbiór $A \div B \equiv (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Pokaż, że:

- a) $A \div (B \div C) = (A \div B) \div C$ (łączność);
- b) $A \cup B = A \div B \div (A \cap B)$;
- c) $A \cap (B \div C) = (A \cap B) \div (A \cap C)$ (rozdzielność);
- d) $A \setminus B = A \div (A \cap B)$.

Zad. 4

Znajdź zbiory:

- a) $A \times B$, gdzie $A = \{a \in \mathbb{R} : x^2 + x - 2 > 0\}$, $B = \{b \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 3 \leq 0\}$
- b) $\mathbb{Z} \cap \{x \in]-5, +\infty[: |x + 2| < 4\} \cap \{x \in \mathbb{R} : \cos(\frac{\pi}{4}x) \leq \frac{2}{3}\}$
- c) $\bigcup_{t \in [2,3]} A_t$ oraz $\bigcap_{t \in [2,3]} A_t$, gdzie $A_t = [t, 2t] \times [-t, t]$
- d) $\bigcup_{n=5}^{\infty} [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$
- e) $\bigcup_{n=1}^{\infty} ([-\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n^2}] \cap [-\frac{1}{2}, 2[)$
- f) $\bigcap_{n=1}^{\infty} ([0, n] \cup [n^2, \infty[)$

Zad. 5

Wykazać za pomocą indukcji matematycznej, że prawdziwe są następujące wzory dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$:

- a) $(1 - \frac{1}{4}) \cdot (1 - \frac{1}{9}) \cdot \dots \cdot (1 - \frac{1}{(n+1)^2}) = \frac{n+2}{2(n+1)}$
- b) $1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$
- c) $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$
- d) $\sum_{k=1}^n k(k+1)^2 = \frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5)$
- e) $\sum_{k=1}^n (4k-3) = n(2n-1)$
- f) $\sum_{k=1}^n (6k-2) = n(3n+1)$
- g) $\sum_{k=1}^n (2k+1)^2 = \frac{1}{3}(n+1)(4n^2+8n+3)$
- h) $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1$
- i) $n! \leq (\frac{n+1}{2})^n$
- j) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < \sqrt{n} + 1$
- k) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$
- l) $\frac{1}{\sqrt{4n+1}} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

Zad. 6

Udowodnij indukcyjnie, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ prawdziwe są poniższe twierdzenia:

- a) $n^7 - n$ jest podzielne przez 7.
- b) $n^3 + 5n$ jest podzielne przez 6.

c) $3^{4n+2} + 1$ jest podzielne przez 10.

d) $13^{2n} + 6$ jest podzielne przez 7.

Zad. 7

Zbadaj surjektywność i iniektywność odwzorowań, dla bijekcji znajdź odwzorowanie odwrotne:

a) $\mathbb{Z} \ni k \mapsto \frac{|4k-1|+1}{2} \in \mathbb{N}$;

b) $\mathbb{Z}^2 \ni (j, k) \mapsto j + k\sqrt{2} \in \mathbb{R}$;

c) $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}$;

d) $\mathbb{Z} \ni k \mapsto 2k^2 - k \in \left\{ \frac{n(n+1)}{2} : n \in \mathbb{N} \right\}$;

e) $\mathbb{N}^2 \ni (m, n) \mapsto 2^{m-1}(2n-1) \in \mathbb{N}$;

f) $\mathbb{R}_+ \ni x \mapsto x - x^{-1} \in \mathbb{R}$;

Zad. 8

Zbadaj ograniczoność zbiorów od góry i od dołu, jeśli są ograniczone podaj ich kresy i powiedz czy kresy należą do zbiorów.

a) $\{m\sqrt{5} - n : m, n \in \mathbb{N}\}$;

b) $\left\{ \frac{n-10}{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}$;

c) $\{x \sin x : x \in]0, \infty[\}$;

d) $\{x \in \mathbb{R} : \left| \frac{x+4}{x+2} \right| < x\}$

e) $\{x + \frac{1}{2x} : x \in]a, b[, 0 < a < b\}$

Zad. 9

Zbadaj zbieżność ciągów (policz granicę bądź wykaż, że ciąg jest rozbieżny, jeśli jest rozbieżny sprawdź czy rozbiega się do $\pm\infty$)

a) $\frac{25^n+7}{3 \cdot 5^{2n}-4}$

b) $\frac{4^{n-1}-5}{2^{2n}+3}$

c) $(\sqrt{n+3} - \sqrt{n})$

d) $\frac{1}{\sqrt{n^2+3n+1} - \sqrt{n^2+2}}$

e) $\frac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}}{n - \sqrt[3]{n^2+8}}$

f) $(\sqrt[3]{n^3+2n^2+4} - \sqrt[3]{n^3+1})$

g) $\sqrt[n]{n^{100} - 2n^2 + 3}$

h) $\sqrt[n]{3^n + 4^n}$

i) $\frac{1}{2^n} \cos(n^3) - \frac{3n}{6n+1}$

j) $2^{-n} a \cos n\pi$

k) $\frac{2n}{2n^2-1} \cos\left(\frac{n+1}{2n-1}\right) - \frac{n}{1-2n} \cdot \frac{n(-1)^n}{n^2+1}$

l) $\frac{2^n \cdot 3^{2n}}{n!}$

m) $\frac{\log_2 n^5}{\log_8 n}$

n) $\frac{9^{\log_3 n}}{4^{\log_2 n}}$

o) $\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$

p) $\left(\frac{n^2+6}{n^2}\right)^{n^2}$

q) $\left(1 - \frac{4}{n}\right)^{-n+3}$

r) $\left(\frac{n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$

s) $\frac{\ln\left(\frac{n+3}{n}\right)}{1/n}$

t) $n^2 [2 \ln n - \ln(n^2 + 2)]$

u) $\sum_{k=1}^n \frac{2}{\sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + k}}$

w) $\frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$

x) $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{(k+2)(k+3)}$

y) $\frac{\ln(3n^2+1)+2n^2+3n+2}{n^2+2}$

$$z) \sqrt[n]{\sum_{k=1}^n k^4}$$

Zad. 10

Zbadaj zbieżność ciągu określonego rekurencyjnie:

- a) $x_0 \in]-1, 2[, x_{n+1} = x_n(x_n - 1)$;
- b) $x_0 > 1, x_{n+1} = \frac{x_n - 2}{x_n - 1}$;
- c) $x_0 > \frac{1}{5}, x_{n+1} = \frac{3x_n + 1}{5x_n - 1}$;
- d) $x_0 = 0, x_{n+1} = \sqrt{2 - x_n}$;
- e) $x_{n+1} = \frac{10}{1 + x_n^2}$ w zależności od $x_0 \in \mathbb{R}$.

Zad. 11 Pan Kowalski umieścił na lokacie x złotych na 1 rok. Oprocentowanie lokaty wynosi $p\%$, przy czym kapitalizacja odsetek następuje co $1/n$ roku gdzie n jest dodatnią liczbą naturalną. Pokaż, że po roku Pan Kowalski będzie miał na lokacie $x \cdot \left(1 + \frac{p/100}{n}\right)^n$ złotych. Jaką kwotę miałby na lokacie, gdyby kapitalizacja następowała nieskończenie często, to znaczy dla $n \rightarrow \infty$?

Zad. 12 Nierówność Cauchiego między średnimi ma postać:

$$(a_1 a_2 \dots a_k)^{1/k} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k},$$

gdzie $a_i \geq 0$ dla $i \in \{1, \dots, k\}$, a k jest dodatnią liczbą naturalną. Udowodnij tę nierówność indukcyjnie dla k postaci $k = 2^n$, gdzie n to kolejne dodatnie liczby naturalne.

Zad. 13 Niech $A_n \equiv \left[\frac{1}{n}, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]$, $n \in \mathbb{N}_+$. Wyznacz zbiory:

- a) $\bigcup_n A_n$
- b) $\bigcap_n A_n$

Czy któryś z tych zbiorów jest otwarty lub domknięty?

Zad. 14 Niech $X \equiv \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N}_+\right\}$. Wyznacz kres górny i kres dolny zbioru X . Czy zbiór X jest otwarty lub domknięty?

Zad. 15 Korzystając z indukcji matematycznej udowodnić, że:

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$$

Zad. 16 Korzystając z indukcji matematycznej udowodnić, że każda liczba $n \geq 5$ spełnia nierówność:

$$2^n > n^2 + n - 1$$

Zad. 17 Ciąg (a_n) określony jest rekurencyjnie w następujący sposób:

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}$$

Wykaż indukcyjnie, że ciąg (a_n) można określić za pomocą wzoru ogólnego:

$$a_n = \frac{2}{2n - 1}$$