

II seria zadań domowych z Analizy I

12.11.2018

Zad. 1

Sprawdzić, które z poniższych funkcji są metryką w $\mathbb{R}$:

- 1) $\rho(x, y) = (x - y)^2$
- 2) $\rho(x, y) = |x^2 - y^2|$
- 3) $\rho(x, y) = \sqrt{|x - y|}$
- 4) $\rho(x, y) = |2x - y|$

Zad. 2

Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną. Sprawdzić, że jeżeli rozważamy dwa ciągi zbieżne x_n, y_n takie, że $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = \rho(x, y)$$

Zad. 3

Rozpatrzmy zbiór $X =]-1, 1[$ z metryką $d(x, y) = \min(|x - y|, 2 - |x - y|)$. Sprawdzić, że to metryka, opisać kule i odcinki w tej metryce oraz sprawdzić, czy ciąg $a_n = \frac{n(-1)^n}{n+1}$ jest w tej przestrzeni ciągiem Cauchy'ego.

Zad. 4

Na przestrzeni $\mathbb{R}^2$ rozważmy metrykę miejską $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$. Sprawdzić, że zbiory $E = \{\mathbf{x} : d(\mathbf{x}, -\mathbf{c}) + d(\mathbf{x}, \mathbf{c}) < 2a\}$, gdzie $\mathbf{c} = (0, c)$ i $0 < c < a$, są sześciokątami. Znaleźć wierzchołki tych sześciokątów (opisać ich współrzędne wyrażone przez c i a).

Zad. 5

Zbadać otwartość i domkniętość podzbiorów przestrzeni $X \subseteq \mathbb{R}$.

1. $X := \{0\} \cup \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}, A := \{1\}, B := \{0, 1, 2\}$
2. $X := \mathbb{R}, A := \{x : \frac{1}{32} \geq x^3 - 2x^2 + x \geq 0\}$
3. $X := \mathbb{R}, A := \{x : x = a^n, n \in \mathbb{N}\}, a \in \mathbb{R}$

Zad. 6

Spradź ciągłość funkcji w zależności od parametrów:

a)

$$f(x) = \begin{cases} -2 \sin(x) & \text{dla } x \leq -\pi/2, \\ A \sin x + B & \text{dla } -\pi/2 \leq x < \pi/2, \\ \cos x & \text{dla } x \geq \pi/2 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2} & \text{dla } x \neq -1, 2, \\ a & \text{dla } x = 2, \\ 1 & \text{dla } x = -1 \end{cases}$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + x^2}{\sin x} & \text{dla } x \neq 0, \\ a & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

d)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^n - 1}{x^m - 1} & \text{dla } x \neq 1, \\ a & \text{dla } x = 1 \end{cases}, m, n \in \mathbb{N}$$

e)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{|x|} & \text{dla } x \neq 0, \\ a & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Zad. 7

Dobrać parametry a i b tak, aby funkcja dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{dla } x \leq 0, \\ \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6} + ax + b & \text{dla } 0 < x \leq 3, \\ (x - 3)^2 & \text{dla } 3 < x \end{cases}$$

była ciągłą na prostej rzeczywistej.

Zad. 8

Opierając się na definicji ciągłości Cauchy'ego wykaż, że funkcja $f(x) = \operatorname{tgh}(x)$ jest ciągła na $\mathbb{R}$.

Zad. 9

Wyznaczyć punkty ciągłości funkcji f , jeśli:

a)

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}, \quad x > 0,$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} x(x^2 - 1) & \text{dla } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in \mathbb{Q}, \\ \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

d)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 - \cos \frac{1}{x} & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

e)

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)(x^2-1) & \text{dla } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Zad. 10

Zbadać jednostajną ciągłość na półprostej $[-1, +\infty[$ następujących funkcji:

a) $f(x) = \ln(1+x^4)$, b) $f(x) = x \operatorname{arctg}(x)$.

Zad. 11

Które z poniższych funkcji są jednostajnie ciągłe na $\mathbb{R}$?

a) $f(x) = \operatorname{tgh}(x)$, b) $f(x) = x \operatorname{tgh}(x)$, c) $f(x) = \sqrt{1+x^4}$.

Zad. 12

Sprawdź czy podane funkcje są jednostajnie ciągłe na podanych przedziałach (w zależności od ewentualnych parametrów):

a) $f(x) = |x|$ na $\mathbb{R}$, b) $f(x) = x^\mu$ na $\mathbb{R}_+$, c) $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ na $\mathbb{R}$.

d) $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ na $\mathbb{R}$, e) $f(x) = x \sin(x)$ na $\mathbb{R}$, f) $f(x) = \sin(x^2)$ na $[0, \infty[$.