

III seria zadań domowych - Analiza I

Różniczkowalność funkcji

Zadanie 1 Dla jakich wartości parametrów $a, b, c \in \mathbb{R}$ funkcje

$$f(x) := \begin{cases} ax+1, & \text{gdy } x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \sin x + b, & \text{gdy } x > \frac{\pi}{2}, \\ ax+b, & \text{gdy } x \leq 0 \end{cases} \quad f(x) := \begin{cases} ax+b, & \text{gdy } a \leq 0, \\ \left(\frac{1}{x} \arcsin x\right)^{1/x^2}, & \text{gdy } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{|x|}, & \text{gdy } |x| > c, \\ ax^2+b, & \text{gdy } |x| \leq c, \end{cases} \quad f(x) := \begin{cases} \sqrt{x^2+a^2}, & \text{gdy } |x| > 1, \\ ax^2+bx+c, & \text{gdy } |x| \leq 1, \end{cases}$$

są różniczkowalne.

Zadanie 2 Zbadać różniczkowalność funkcji w $\mathbb{R}$ danych wzorem

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & \text{gdy } x \neq 0, \\ 0, & \text{gdy } x = 0, \end{cases}$$

Zadanie 3 Sprawdzić różniczkowalność funkcji w podanych punktach:

$$f_1(x) := \begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, & \text{gdy } x \neq 0, \\ 0, & \text{gdy } x = 0, \end{cases} \quad f_2(x) := \begin{cases} 2^x + 3x^2, & \text{gdy } x < 2, \\ \log_{\sqrt{2}} x + 7x, & \text{gdy } x \geq 2, \end{cases}$$
$$f_3(x) := \begin{cases} \sqrt[3]{x^2} \cos \frac{1}{x}, & \text{gdy } x \neq 0, \\ 0, & \text{gdy } x = 0, \end{cases} \quad f_4(x) := \begin{cases} x^3 + x^2 - \frac{1}{\pi} \sin \pi x, & \text{gdy } x \leq 1, \\ x^5 + x, & \text{gdy } x > 1, \end{cases}.$$

Obliczanie pochodnych

Zadanie 4 Obliczyć pochodne

$$y = \ln \ln \operatorname{tg} x, \quad y = 3^{\operatorname{tg}^4(x^2+5x)}, \quad y = \arccos \sqrt{1-2x}, \quad y = \frac{x^3(x^2+1)^4}{\sqrt{x(x-1)}}.$$
$$y = \ln \left(\frac{x^2}{2} + \sqrt{\operatorname{tg} x} \right), \quad y = \operatorname{arctg}^3 \left(\frac{3 \ln x + 2}{4x+1} \right), \quad y = \frac{\sqrt{x^2+1} \cos(2x+1)}{3^{x+1}},$$
$$y = \frac{\sqrt{x} \arctan(2x-1)}{\ln x}, \quad y = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}, \quad y = \cos^2 \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \right).$$
$$y = \arccos \sqrt{1-x^2}, \quad y = \ln \frac{2x+\sqrt{x}}{1-x^2}.$$

Zadanie 5 Obliczyć pochodne

$$y = (\operatorname{ctg}(x))^{x^3}, \quad y = x^{\arcsin x}, \quad y = x^{\ln x}, \quad y = (\cos x)^{\operatorname{arctg} x}, \quad y = (\sin 2x)^{\operatorname{tg} x}.$$

Zadanie 6 Obliczyć dziesiątą pochodną funkcji

$$a) f(x) = xe^{2x}, \quad b) f(x) = x^2 \sqrt[3]{1-x}, \quad c) x^3 \log(5+2x).$$

Zadanie 7 Udowodnić, że

$$[f(x)g(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x).$$

Wskazówka: skorzystać z zasady indukcji.

Zadanie 8 Znajdź n -tą pochodną funkcji:

$$f(x) = (3x^2 + 3x + 1)\ln(x+1), \quad f(x) = \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 4}.$$

Zadanie 9 Obliczyć lewostronną i prawostronną granicę funkcji w podanych punktach

$$a) f(x) = xe^{1/x}, \quad x = 0, \quad b) f(x) = \frac{x}{2x + e^{\frac{1}{x-1}}}, \quad x = 1, \quad c) f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}, \quad x = 0.$$

Zadanie 10 Wyznaczyć granice:

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x + 16} & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x} \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 5x^2 - 6x - 16} & \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{\sin x} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{kx}}{x^n} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} \end{array}$$

Zadanie 11 Wyznaczyć granice:

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 2x & \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt[3]{x} \log x \\ \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\tan x - \sec x) & \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\log n} - \frac{x}{x-1} \right) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx} \end{array}$$

Zadanie 12 Wyznaczyć granice:

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 0} \cos 3x \operatorname{tg} 5x & \lim_{x \rightarrow +0} x^2 e^{\sqrt{x}} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5}{x^2 - 1} - \frac{7}{x^7 - 1} \right) & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right) \end{array}$$

Zadanie 13 Wyznaczyć granice:

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg}(x))^{\operatorname{tg} 2x} & \lim_{x \rightarrow +\infty} (\log x)^{\frac{1}{x}} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^x)^{\frac{1}{x}} & \lim_{x \rightarrow 1+} (x - 1)^{\frac{a}{\log 2(x-1)}} \end{array}$$

Zadanie 14 Obliczyć granice przy $x \rightarrow 0$ następujących funkcji:

$$a) f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}, \quad b) f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}, \quad c) f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tanh^2 x}.$$

Przebieg funkcji

Zadanie 15 Narysować wykres funkcji

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} - \operatorname{arctg} x.$$

Zadanie 16 Zbadać przebieg funkcji $f: \mathbb{R} \setminus]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}.$$

Zadanie 17 Dowiesć, że $(1+x)^p \geq 1+px$ dla $x \in]1, +\infty[$ oraz $p \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$.

Zadanie 18 Wyznaczyć przedziały monotoniczności następujących funkcji

$$(a) f(x) = (1-x^2), \quad (2) f(x) = 1-24x+5x^2-2x^3, \quad (3) f(x) = \log|x|.$$

Zadanie 19 Zbadać przebieg zmienności i naszkicuj wykres funkcji:

$$f(x) = \frac{x^3+2x^2-8x}{x^2-9}, \quad f(x) = \ln(\sin x), \quad f(x) = x \frac{x^2+4}{x^2-25}.$$

Zadanie 20 Znaleźć ekstrema następujących funkcji

$$(a) f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^2}, \quad \frac{10}{4x^3-9x^2+6x}, \quad f(x) = \ln|x|.$$

Szeregi Taylora

Zadanie 21 Rozwinąć w szereg Taylora wokół podanego punktu następujące funkcje:

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}, & x=0 \\ b) f(x) = \sin x - x \cos x, & x=0, \\ c) f(x) = \frac{1}{x}, & x=3 \\ d) f(x) = x\sqrt{x}, & x=1, \\ e) f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}, & x=2, \\ f) f(x) = \cos \frac{1}{2}x, & x=\frac{1}{2}\pi, \end{array}$$

Zadanie 22 Napisać wzór Taylora w $x_0 = 0$ dla funkcji

$$f(x) = \ln[1 + \ln(1+x)], \quad f(x) = (1 + \operatorname{tgh} x)^\pi, \quad f(x) = \sin^2 x - x^2 e^{-x}.$$

Zadanie 23 Policzyc za pomocą wzoru Taylora granicę $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} - 2\sqrt{x})$.

Zastosowania pochodnych

Zadanie 24 Jak z trzech jednakowych desek zrobić rynię o największym przekroju poprzecznym?

Zadanie 25 Wybrać takie miejsce na budowę mostu przez rzekę, aby długość drogi łączącej dwa obiekty leżące po różnych stronach rzeki była jak najmniejsza.

Zadanie 26 Jakie wymiary musi mieć prostokąt utworzony z kawałka drutu o długości l , aby jego pole było największe ?

Zadanie 27 Od kanału o szerokości a odchodzi pod kątem prostym kanał o szerokości b . Jaką najdłuższą drewnianą belką można spławić z jednego kanału do drugiego.

Zadanie 28 Korzystając z rozwinięć odpowiednich funkcji oblicz $\sqrt{e}$ z dokładnością do 0.001 posługując się rozwinięciem e^x .

Szeregi

Zadanie 29 Znajdź szereg oraz jego sumę $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N$ jeśli N -ty wyraz ciągu $\{S_N\}_{n \in \mathbb{N}}$ sum częściowych ma postać

$$(i) \quad S_N = \frac{N+1}{N}, \quad (ii) \quad S_N = \frac{2^N - 1}{2^N}, \quad (iii) \quad S_N = \frac{(-1)^N}{N}$$

Zadanie 30 Udowodnij tożsamość

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2 - n + 1} = \frac{\pi}{2}$$

rozważając ciąg sum częściowych $S_N = \operatorname{arctg} N$.

Wskazówka: wykorzystaj tożsamość

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

Zadanie 31 Oblicz granicę ciągu sum częściowych szeregu, którego N -ty wyraz ma postać .

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{4n^2 - 1}, & S_N &= \sum_{n=1}^N \frac{n+2}{n(n+1)2^n}, & S_N &= \sum_{n=1}^N \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}, \\ S_N &= \log \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^N \log \frac{(n+1)(3n+1)}{n(3n+4)}, & S_N &= \sum_{n=1}^N \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}, \\ S_N &= \sum_{n=1}^N \frac{n - \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n(n+1)}}, & S_N &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n(n+1)})}, \\ S_N &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+p)}, \quad p \in \mathbb{N}, & S_N &= \sum_{n=1}^N \sin \frac{1}{2^{n+1}} \cos \frac{3}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Zadanie 32 Niech $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem malejącym o wyrazach dodatnich. Udowodnij równoważność stwierdzeń:

- (i) Szereg o N -tej sumie częściowej $\sum_{n=1}^N x_n$ jest zbieżny.
- (ii) Szereg o N -tej sumie częściowej $\sum_{n=1}^N n x_{n^2}$ jest zbieżny.

Zadanie 33 Zbadaj zbieżność szeregu, którego N -ta suma częściowa ma postać

$$S_N = \sum_{n=1}^N \sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+1}, \quad S_N = \sum_{n=1}^N \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right), \quad S_N = \sum_{n=1}^N (\sqrt[n]{2} - 1)^2,$$

$$S_N = \sum_{n=1}^N e^{\frac{a \log n + b}{c \log n + d}}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad S_N = \sum_{n=1}^N -\log \left(\cos \frac{1}{n} \right),$$

$$S_N = \sum_{n=1}^N \left(\frac{2}{1 + \sqrt[n]{5}} \right)^n, \quad S_N = \sum_{n=1}^N \left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1} \right)^{n^2}, \quad S_N = \sum_{n=1}^N (\sqrt[n]{n} - 1)^n,$$

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{n^{n+1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n-1}{2}}}, \quad S_N = \sum_{n=1}^N \frac{(2n)!2^n}{n^{2n}}, \quad S_N = \sum_{n=1}^N \frac{(n+5)^5}{2^n + n^2},$$

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{p^n \cdot n!}{n^n}, \quad p \in \mathbb{R} \quad S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}, \quad S_N = \sum_{n=1}^N \frac{(n^2-1)^n}{(2n)!2^n},$$

$$S_N = \sum_{n=1}^N n^2 \left(\frac{1}{n} - 1 \right)^{n^2}, \quad S_N = \sum_{n=1}^N \log \left(\cos \frac{\pi}{3n} \right),$$

$$S_N = \sum_{n=1}^N (-1)^n \frac{\log^a n}{n^b}, \quad a, b > 0$$

Zadanie 34 Niech $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem o wyrazach dodatnich rozbieżnym do $+\infty$. Czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{\log \frac{1}{n}}$$

jest zbieżny?

Zadanie 35 Znajdź zbiór złożony z punktów zbieżności poniższych szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n^2 - \log n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\log x^n}}{(\log n)^{\log n}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2 + (-1)^n)^n x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{(-1)^n n^2} x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \operatorname{tg}^n x,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{2x+1}{x} \right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n4^n}{3^n} x^n (1-x)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+(-1)^n}{5-(-1)^n} \right) \log^n x,$$