

1 Zadania z Analizy I – Semestr zimowy 2018-2019

Zadania w kolorze “ceglastym” są trudniejsze, dla ambitnych chętnych do poćwiczenia.

ZADANIE 1.1

Oblicz

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-x} n^2 x^n}{n!} - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-x} n x^n}{n!} \right)^2$$

ZADANIE 1.2

Rozwiąż równanie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{((-1)^n + (-2)^n) e^{nx}}{n!} = 1$$

ZADANIE 1.3

Obliczyć całki:

1. $\int \frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}} dx$;
2. $\int \frac{6x^3+x^2-2x+1}{2x-1} dx$;
3. $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$;
4. $\int \operatorname{tg}^2 x dx$;
5. $\int (x^2 + 5)^3 dx$;
6. $\int (3x + 5)^{17} dx$;
7. $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} dx$;
8. $\int \cos(\pi x + 1) dx$;
9. $\int \cos(4x) \cos(7x) dx$;
10. $\int \frac{1}{x^2+4x+5} dx$;
11. $\int \frac{1}{x^2+x+1} dx$;
12. $\int \frac{1}{\sqrt{4-9x^2}} dx$;
13. $\int \frac{1}{\sqrt{5-x^2-4x}} dx$;
14. $\int \frac{1}{4-x^2-4x} dx$;

15. $\int \frac{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx;$
16. $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx;$
17. $\int (\sin(5x) - \sin(5\alpha)) dx;$
18. $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$

ZADANIE 1.4

Metodą podstawienie obliczyć całki:

1. $\int x\sqrt{x-5} dx;$
2. $\int \frac{1}{1+e^x} dx; 1+e^x = t \text{ lub } u = e^{-x};$
3. $\int \frac{x^2+3}{\sqrt{(2x-5)^3}} dx;$
4. $\int \frac{x^2-1}{(x^4+3x^2+1)\arctg(x+1/x)} dx;$
5. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4} dx;$
6. $\int \frac{1}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx;$
7. $\int \sqrt[3]{1+3\sin x \cos x} dx;$
8. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx;$
9. $\int \frac{1}{(\arcsin x)^5 \sqrt{1-x^2}} dx;$
10. $\int \frac{\sin(2x)}{1+\sin^2 x} dx;$
11. $\int \frac{1+\ln x}{3+x \ln x} dx.$

ZADANIE 1.5

Metodą całkowania przez części obliczyć całki:

1. $\int \arctg x dx;$
2. $\int \arcsin x dx;$
3. $\int x \cos x dx;$
4. $\int x^3 \ln x dx;$
5. $\int (3x^2 + 6x + 5) \arctg x dx;$
6. $\int \cos(\ln x) dx$ (zastosować dwa razy).

ZADANIE 1.6

Rozbić na ułamki proste następujące funkcje:

1. $\frac{1}{(x-2)(x+3)},$

2. $\frac{x}{(x+1)(x+2)},$

3. $\frac{1}{x(x^2-1)},$

4. $\frac{x-1}{x^2-2x-3},$

5. $\frac{x}{(x-1)(x^2+1)},$

6. $\frac{x^3+2}{2x^3+1}$

a następnie wyznaczyć ich funkcje pierwotne.

ZADANIE 1.7

Niech

$$I_n = \int dx \frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

Znaleźć liniową rekurencję wyrażającą I_n poprzez I_{n-1} , a następnie wyznaczyć całkę

$$\int dx \frac{x^2+x}{(1+x^2)^3}.$$

ZADANIE 1.8

Wyznaczyć całki z funkcji trygonometrycznych:

$$\begin{array}{lll} \int dx \sin^4 x, & \int dx \operatorname{ctg}^2 x, & \int dx \operatorname{tg}^3 x, \\ \int dx \frac{1}{\sin x \cos^2 x}, & \int dx \frac{\cos^3 x}{\sin x}, & \int dx \frac{1}{\sin^4 x}. \end{array}$$

ZADANIE 1.9

Całkując przez części udowodnić rekurencję

$$I_n = \int e^{\alpha x} \sin^n x dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + n^2} \sin^{n-1} x (\alpha \sin x - n \cos x) + \frac{n(n-1)}{\alpha^2 + n^2} I_{n-2}.$$

Korzystając z tego wyniku (przesunięcie x) napisać rekurencję dla całki z funkcją kosinus (tzn. nie powtarzać rachunków).

ZADANIE 1.10

Wykazać, że całka

$$I_n = \int_0^{\pi/2} dx \sin^n x$$

spełnia związek rekurencyjny

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Wykazać, że

$$I_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{\pi}{2}$$

lub

$$I_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$$

gdzie

$$n!! = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots n, & \text{dla nieparzystych } n \\ 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots n, & \text{dla parzystych } n \end{cases}$$

Powtórzyć rachunki dla całki

$$J_n = \int_0^{\pi/2} dx \cos^n x.$$

ZADANIE 1.11

Niech

$$I_n = \int_0^{\pi/4} dx \operatorname{tg}^{2n} x.$$

Wykazać rekurencję

$$I_n = \frac{1}{2n-1} - I_{n-1}.$$

ZADANIE 1.12

Korzystając z wyników zadania 1.11 obliczyć całki

$$\int_0^1 dx (1-x^2)^n, \quad \int_0^1 dx \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}.$$

ZADANIE 1.13

Niech

$$J(2m, 2n) = \int_0^{\pi/2} dx \sin^{2m} x \cos^{2n} x.$$

Udowodnić rekurencję

$$J(2m, 2n) = \frac{2n-1}{2m+1} J(2m+2, 2n-2)$$

a następnie, korzystając z zadania 1.11 wykazać, że

$$J(2m, 2n) = \frac{\pi(2n)!(2m)!}{2^{2m+2n+1}m!n!(m+n)!}.$$

ZADANIE 1.14

Niech dla naturalnych n i m

$$B(m, n) = \int_0^1 dx x^{m-1}(1-x)^{n-1}$$

Wykazać rekurencję

$$B(m, n) = \frac{n-1}{m} B(m+1, n-1)$$

a następnie równość

$$B(m, n) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)!}$$

Funkcja $B(p, q)$ dla dodatnich argumentów nazywana jest funkcją Eulera drugiego rodzaju.